

1²3



APOSTILA PREPARATÓRIA PARA A

OBMEP

ORGANIZAÇÃO TIME VENN

NÍVEL 1 FASE 2



original TIMEVENN

Conselhos Venn para conquistar uma medalha na OBMEP!!

1 > Otimize seu tempo

Seja íntimo das apostilas da 1º e da 2º fase. Aproveite cada intervalo de tempo livre: exercite no intervalo de uma consulta, depois de terminar um exercício na sala de aula... Aproveite todas as brechas para exercitar; de pouco em pouco você verá o quanto valeu a pena.

2 > Observe seus pontos fracos

Perceba quais tipos de questões ou quais assuntos te levam mais recorrentemente ao erro e busque exercitá-los (sanando dúvidas e revisando o conteúdo). Estamos sempre aqui para ajudar e lembre-se: o erro é sempre a melhor forma de evoluir.

3 > Cuide da sua explicação

Para a segunda fase, é fundamental que você saiba explicar qual o raciocínio utilizou ao resolver o exercício, portanto aprenda a traduzir seus pensamentos com clareza, e, acima de tudo, organização. Quando for escrever, imagine que alguém que não sabe como resolver a questão precise entendê-la a partir de sua descrição e, dessa forma, você vai perceber que uma linguagem simples é muito melhor. Sempre confira suas respostas com o gabarito oficial ou peça que algum monitor ou professor corrija. Sintam-se à vontade para enviar qualquer dúvida no nosso instagram [**@timevenn**](#), vai ser um prazer ajudá-los.

4 > Simule seu tempo

De tempo em tempo, separe um dia para simular as condições da prova. Separe um caderno desta apostila, um lugar que possa se concentrar e tente resolver as questões no tempo que terá de fato no dia oficial. Esse passo é muito importante para que se acostume a solucionar as questões mais rapidamente.

5 > DESISTIR JAMAIS!

Mais importante do que uma medalha é o conhecimento e o crescimento pessoal adquiridos ao longo dos estudos, essa é a verdadeira conquista. Torne o processo prazeroso, divertido e desafiador. Confiamos em vocês e boa sorte em suas jornadas olímpicas!!

Esta apostila declara agradecimentos especiais aos seus contribuintes que, com esforço e dedicação buscam compartilhar o conhecimento:

Produção:

- André Aredes Brum Ribeiro - Diretor Acadêmico
- Gabriel Marques Martins Gomide - Assessor Acadêmico
- Aline Fioravante Zuliani
- Antônia Rocha Maciel
- Melissa Neves Lima do Nascimento
- Miguel Ramos Toledo
- Pedro das Chagas Benevenuto
- Matheus Carvalho Albeny Moraes

Contribuição Financeira:

- Sophia Nahas
- Bernardo Quintão
- Emmanuel Maurício
- André Aredes
- Daniel Augusto
- Gabriel Gomide
- Matheus Diniz
- Maria Antônia Caux
- Júlia Soares
- Matheus Albeny
- Pedro Lagares
- Sofia Lagares
- Arthur Ferreira

SUMÁRIO

A. Lógica

A.1 Percepção de padrões	2
A.2 Jogos de Verdade e Mentira	5
A.3 Paridade e Multiplicidade	10
A.4 Números especiais	18

B. Álgebra

B.1 Operações Básicas e Frações	30
B.2 Utilizando incógnitas	42
B.3 Princípio Multiplicativo	53

C. Geometria

C.1 Área e Perímetro	61
C.2 Geometria no quadriculado	69
C.3 Dividir para conquistar	74
C.4 Geometria Espacial	77

D. Combinatória

D.1 Princípio Multiplicativo	83
------------------------------	----

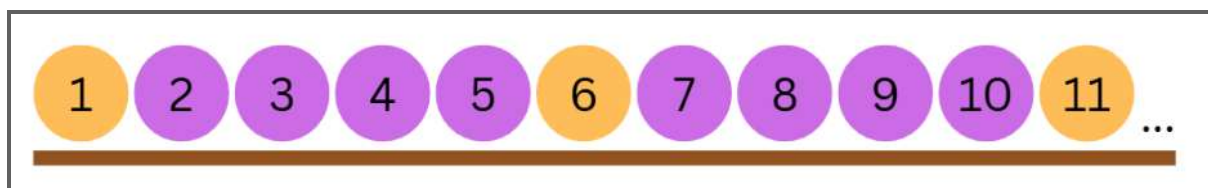
A. Lógica

A lógica é uma das áreas fundamentais do conhecimento, especialmente no contexto matemático, onde desempenha um papel central na construção do raciocínio formal. Ela é responsável por estabelecer critérios e métodos que permitem avaliar a validade de argumentos e conclusões, ajudando a distinguir entre o que é verdadeiro e o que é falso com base em princípios bem definidos.

Ao compreender a lógica, o estudante desenvolve habilidades para pensar de forma estruturada e analítica, o que é essencial não só para a resolução de problemas matemáticos, mas também para a tomada de decisões em diversas situações da vida cotidiana. Este capítulo se dedicará aos fundamentos da lógica, fornecendo exercícios para aprimorar cada vez mais sua habilidade.

A.1 Percepção de padrões

1) O professor de educação física Chagas organiza bolas numeradas amarelas e roxas em uma estante no ginásio da seguinte maneira:



- a) Qual será a próxima bola amarela de número múltiplo de 3?
- b) De qual cor será a bola de número 2026?
- c) Quantas bolas amarelas terão números múltiplos de 3 até a bola número 2026?

2) Antônia ama a palavra “VENN” e a escreveu diversas vezes em seu caderno, sem espaço, como em “VENNVENNVENN”. Depois, decidiu separá-las em sequências, com cada sequência contendo o mesmo número de membros que seu número. Aqui estão as três primeiras sequências:

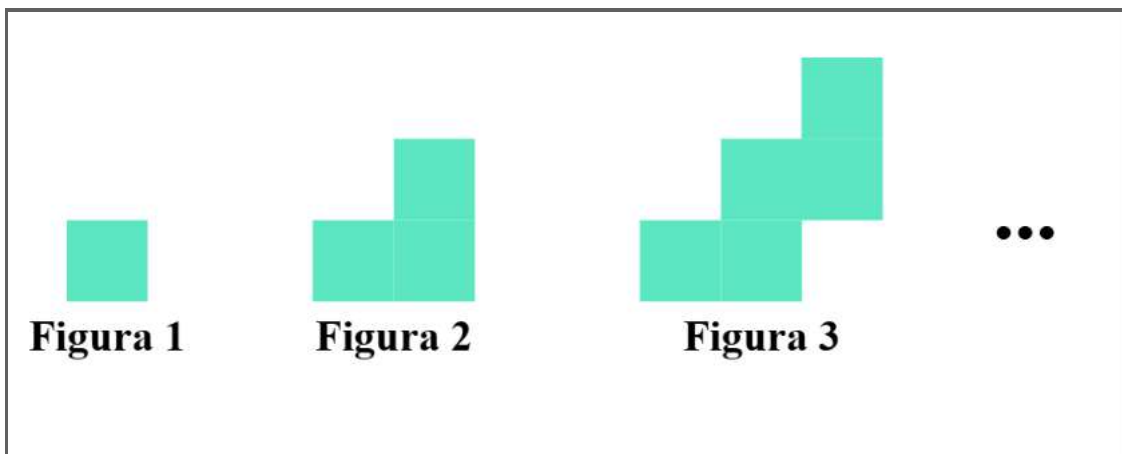
Sequência 1: (V)

Sequência 2: (E, N)

Sequência 3: (N, V, E)

- a) Quais letras formam a sequência 4?
- b) Qual será a última letra do grupo 10?
- c) No grupo 20, a letra N aparece quantas vezes?

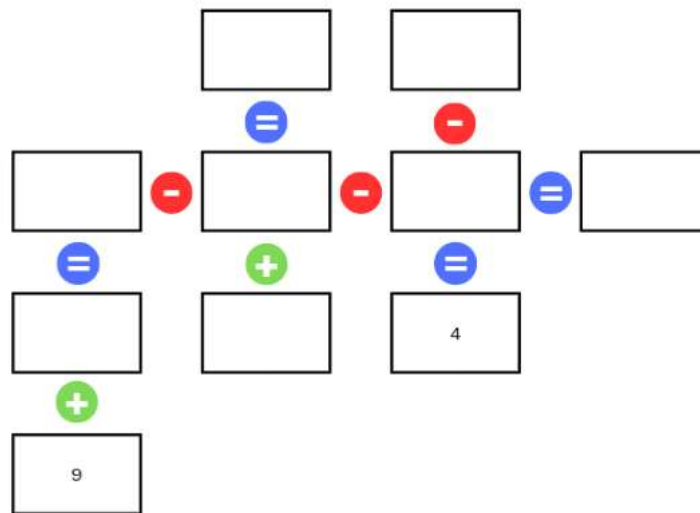
3) Um pai brinca com seu filho de montar escadas com quadradinhos de papel. Cada quadradinho tem 1 cm de lado.



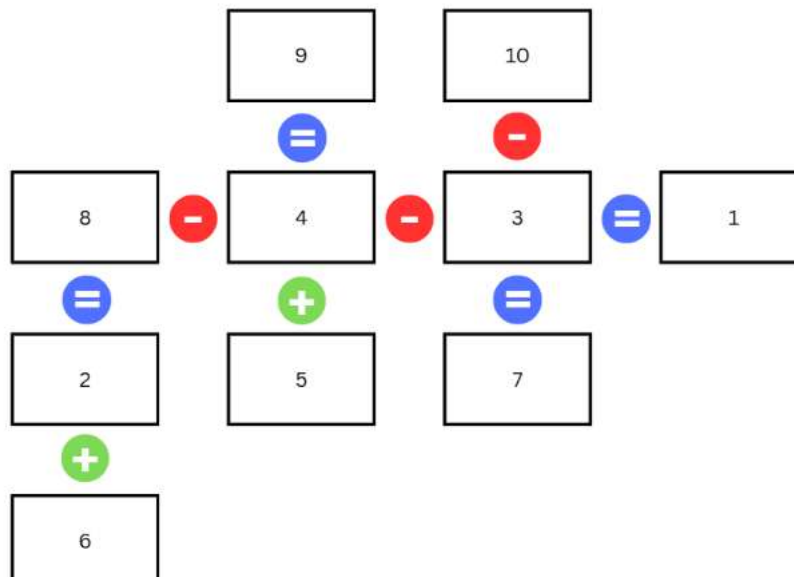
- a) Quais serão o perímetro e a área da figura 4?
- b) Quais serão o perímetro e a área da figura 2026?
- c) É possível fazer uma figura com 2026 cm² de área? E com 2026 cm de perímetro? Justifique.

4) Melissa quer resolver o seguinte problema: completar os seguintes diagramas com números de 1 a 10, de forma que as operações sejam verdadeiras e que os números não se repitam.

a) Complete um dos diagramas escolhidos por Melissa:



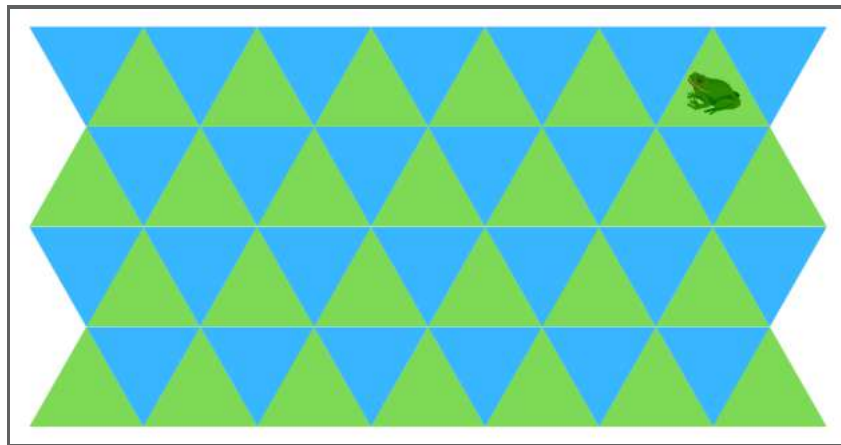
b) Melissa já resolveu o diagrama a seguir. Qual o número mínimo de casas que devem ser dadas no início do exercício para que só exista uma solução?



5) Um sapo salta de uma ilha (triângulo verde) a outra em um lago (triângulos azuis). Ele só consegue se locomover até triângulos vizinhos, como mostrado pelas setas na figura.

Apostila em preto e branco: O sapo no item (a) está em um triângulo verde. Os triângulos que dividem um lado com esse triângulo são todos azuis. Os triângulos que dividem lado com um triângulo azul são todos verdes, e assim por diante.

a) Desenhe, na figura, um caminho de 6 saltos de forma que o sapo volte à ilha inicial.



b) Saindo de uma ilha e fazendo um trajeto de 10 saltos, o sapo parou em uma ilha ou dentro da água? Justifique.

c) Explique por que é impossível que o sapo faça um trajeto completo pelo lago visitando cada triângulo uma única vez.

A.2 Jogos de Verdade e Mentira

1) Júlia e Maria Clara brincam com o seguinte jogo: Maria Clara tenta adivinhar em qual forma geométrica (polígonos de até 10 lados) Júlia está pensando com base nas seguintes perguntas respondidas por Júlia, que pode responder todas verdadeiramente, ou todas falsamente.

1. A forma escolhida tem número de lados maior que 6?
2. A forma escolhida tem nome com menos de 8 letras?
3. A forma escolhida tem a letra A?
4. A forma escolhida tem a letra T?

a) Se Júlia escolheu o quadrilátero, qual será a ordem das respostas, se respondesse verdadeiramente?

b) Por qual afirmativa Maria Clara pode identificar imediatamente se Júlia mentiu ou falou a verdade?

c) Se Júlia respondeu Não, Sim, Sim, Não, em qual polígono pensou?

Resolução:

a) Para o Quadrilátero:

- **Pergunta 1 (Lados > 6?):** Não (possui 4 lados).
- **Pergunta 2 (Nome < 8 letras?):** Não (possui 12 letras).
- **Pergunta 3 (Tem 'A'?):** Sim (Quadrilátero).
- **Pergunta 4 (Tem 'T'?):** Sim (Quadrilátero).

Resposta:

- Se ela falou a verdade: **Não, Não, Sim, Sim.**
- Se ela mentiu: **Sim, Sim, Não, Não.**

b) Pela afirmativa 2: "A forma escolhida tem nome com menos de 8 letras?".

Polígono	Número de lados	Nome
	3	Triângulo
	4	Quadrilátero
	5	Pentágono
	6	Hexágono
	7	Heptágono
	8	Octógono
	9	Eneágono
	10	Decágono

Explicação: Conforme observado na tabela acima, todos os polígonos listados (de 3 a 10 lados) possuem 8 ou mais letras em seus nomes. Portanto, a resposta verdadeira para essa pergunta deve ser sempre "Não". Se Ana responder "Sim" a esta pergunta, Maria Clara saberá imediatamente que ela está mentindo em todas as questões.

c) Vamos analisar a sequência dada: Não, Sim, Sim, Não.

1. Como a segunda resposta foi "Sim" (o que contradiz a verdade, que seria sempre "Não" para a pergunta 2), sabemos que **Júlia está mentindo**.
2. Portanto, devemos **inverter** a sequência dada para descobrir as respostas verdadeiras: **Sim, Não, Não, Sim**.
3. Agora, buscamos um polígono que satisfaça estas condições:
 - **> 6 lados?** Sim (Deve ser Heptágono, Octógono, Eneágono ou Decágono).
 - **< 8 letras?** Não (Consistente com todos).
 - **Tem 'A'?** Não.
 - **Tem 'T'?** Sim.

Analisando os candidatos:

- Heptágono: Tem 'A'. (Incorreto)
- Eneágono: Tem 'A'. (Incorreto)
- Decágono: Tem 'A'. (Incorreto)
- **Octógono**: Não tem 'A' e tem 'T'. (Correto)

Resposta: Júlia pensou no **Octógono**.

2) 3 amigos decidiram jogar “Logicus”, um jogo para descobrir quais pessoas do grupo falam a verdade e quais mentem. O jogo tem as seguintes regras:

- Existem 4 cartas: duas azuis e duas amarelas.
- Cada jogador deve retirar uma carta e dizer em voz alta qual a cor de sua carta.
- Se apenas um jogador mentir, ou se apenas um falar a verdade, o grupo perde.
- Se todos os jogadores mentirem, ou todos os jogadores falarem a verdade, o grupo ganha.

a) Na primeira rodada, todos os jogadores disseram ter cartas azuis. A carta restante também foi azul. Nesta rodada, o grupo ganhou ou perdeu?

b) Na segunda rodada, todos os jogadores disseram ter cartas amarelas. A carta restante foi azul. Nesta rodada, o grupo ganhou ou perdeu?

3) Miguel, Aline e Gabriela decidiram qual flor do jardim Venn era a preferida de cada um:

- Miguel disse que sua flor favorita era a azul de 5 pétalas, mas mentiu sobre o número de pétalas.
- Aline disse que sua flor favorita era a roxa de 8 pétalas, mas mentiu sobre a cor.
- Gabriela disse que sua flor favorita era a rosa de 6 pétalas, mas mentiu sobre a cor e sobre o número de pétalas.



a) Quais flores podem ser a favorita de Miguel?

b) Quais flores podem ser a favorita de Gabriela?

c) Se todos escolheram cores de diferentes formatos e cores, qual é a flor favorita de cada um?

4) Os amigos André, Max, Pedro e Toledo estão conversando em uma viagem de ônibus. Algumas pessoas no ônibus vieram da cidade Falsolândia, e outras são de Verdadópolis. Os falsolandenses sempre mentem, e os verdadopolitanos sempre são verdadeiros. Ao serem parados em um pedágio, os amigos responderam:

André: Max e Pedro são da mesma cidade.

Max: Toledo é verdadopolitano.

Pedro: Max é falsolandense.

Toledo: Todos somos falsolandenses.

a) Toledo é de qual cidade? Justifique.

b) Max é de qual cidade? Justifique.

c) André é de qual cidade? Justifique.

5) Um aventureiro encontrou três caixas coloridas: uma Azul, uma Verde e uma Vermelha. Dentro de apenas uma delas há uma moeda de ouro, e as outras duas estão vazias. Cada caixa possui uma etiqueta com uma frase, mas apenas uma etiqueta diz a verdade.

Caixa Azul: "A moeda não está aqui."

Caixa Verde: "A moeda não está na Caixa Vermelha."

Caixa Vermelha: "A moeda está aqui."

a) Suponha que a etiqueta da Caixa Vermelha seja a verdadeira. Mostre por que isso criaria um absurdo em relação à etiqueta da Caixa Azul.

b) Suponha que a etiqueta da Azul seja a verdadeira. Mostre por que isso criaria um absurdo em relação à etiqueta da Caixa Verde.

c) Qual etiqueta diz a verdade, e em qual caixa está a moeda?

A.3 Paridade e Multiplicidade

Para diversas questões da OBMEP, é necessário entender a paridade, ou seja, a qualidade de certo número de ser par ou ímpar, e a relação que possui com operações matemáticas que envolvem diferentes (par-ímpar) ou semelhantes paridades (par-par, ímpar-ímpar).

Primeiramente, vamos entender este conceito em operações básicas. Observe como esta relação ocorre com a **soma** de dois números inteiros positivos:

Em situações em que a paridade é a mesma, o resultado da soma vai ser um número par. Já em situações em que a paridade é diferente, o resultado sempre será um número ímpar. As expressões a seguir resumem esta relação:

Paridades iguais	Paridades diferentes
$(\text{par}) + (\text{par}) = (\text{par})$	$(\text{par}) + (\text{ímpar}) = (\text{ímpar})$

$(\text{ímpar}) + (\text{ímpar}) = (\text{par})$	$(\text{ímpar}) + (\text{par}) = (\text{ímpar})$
--	--

Agora que já entendemos somas de dois números inteiros, vamos estudar somas de múltiplas parcelas inteiras. Primordialmente, focaremos em entender esta relação em somas de parcelas pares.

Considerando as regras anteriores, uma soma com um número par de parcelas pares (exemplificada pelo número 4) também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\text{Par} + \text{par} + \text{par} + \text{par} =$$

$$(\text{par} + \text{par}) + (\text{par} + \text{par}) =$$

$$\text{par} + \text{par} = \text{par}$$

Já uma soma com um número ímpar de parcelas pares (exemplificada pelo número 3) pode ser escrita do seguinte modo:

$$\text{par} + \text{par} + \text{par} =$$

$$(\text{par} + \text{par}) + \text{par} =$$

$$\text{par} + \text{par} = \text{par}$$

Logo, é possível dizer que **a soma de qualquer quantidade de inteiros pares sempre vai ser um inteiro par.**

Agora, vamos pensar em uma soma de uma **quantidade par** (exemplificada pelo número 4) de parcelas ímpares desta forma:

$$\text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar} =$$

$$(\text{ímpar} + \text{ímpar}) + (\text{ímpar} + \text{ímpar}) =$$

$$\text{par} + \text{par} = \text{par}$$

Assim, é possível dizer que **a soma de uma quantidade par de inteiros ímpares sempre vai ser um inteiro par.**

Agora, vamos pensar na soma de uma quantidade ímpar (exemplificada pelo número 3) de parcelas ímpares desta forma:

$$\text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar} =$$

$$(\text{ímpar} + \text{ímpar}) + \text{ímpar} =$$

$$\text{par} + \text{ímpar} = \text{ímpar}$$

Assim, é possível dizer que **a soma de uma quantidade ímpar de inteiros ímpares sempre vai ser um inteiro ímpar.**

Já entendemos como a soma de qualquer quantidade de inteiros de paridade semelhante funciona, mas e com inteiros de paridades diferentes? Neste caso, é necessário focar no número de parcelas ímpares presentes na expressão, já que qualquer quantidade dos pares sempre vai ser par.

Se o número de parcelas ímpares for par, o resultado da soma destas também vai ser par, e, ao somar com o número par resultante da soma dos números pares, o resultado final também vai ser par.

Já se o número de parcelas ímpares for ímpar, o resultado da soma destas também vai ser ímpar, e, ao somar com o número par resultante da soma dos números pares, o resultado final será ímpar.

Desse modo, a paridade do resultado da soma de uma quantidade maior que dois de números inteiros de diferentes paridades é a mesma da quantidade de números ímpares somados.

Assim, as regras para a paridade da soma de múltiplas parcelas inteiras são as seguintes:

- A soma de qualquer quantidade de inteiros pares sempre vai ser um inteiro par;
- A soma de uma quantidade par de inteiros ímpares sempre vai ser um inteiro par; e
- A soma de uma quantidade ímpar de inteiros ímpares sempre vai ser um inteiro ímpar.

A soma de uma quantidade maior que dois de números inteiros de diferentes paridades tem a mesma paridade da quantidade de números ímpares somados.

Para a **subtração**, as regras são as mesmas:

Paridades iguais	Paridades diferentes
$(\text{par}) - (\text{par}) = (\text{par})$	$(\text{par}) - (\text{ímpar}) = (\text{ímpar})$
$(\text{ímpar}) - (\text{ímpar}) = (\text{par})$	$(\text{ímpar}) - (\text{par}) = (\text{ímpar})$

Subtração de múltiplas parcelas de números inteiros

- A subtração de qualquer quantidade de inteiros pares sempre vai ser um inteiro par;
- A subtração de uma quantidade par de inteiros ímpares sempre vai ser um inteiro par;
- A subtração de uma quantidade ímpar de inteiros ímpares sempre vai ser um inteiro ímpar.

A subtração de uma quantidade maior que dois de números inteiros de diferentes paridades tem a mesma paridade da quantidade de números ímpares na expressão.

Para a multiplicação, temos as seguintes regras

par x par = par

par x ímpar = ímpar x par = par

ímpar x ímpar = ímpar

Já para a divisão, temos as seguintes regras

- Se a divisão de um par por um ímpar resultar em um inteiro, este será par
- Se a divisão de um ímpar por um ímpar resultar em um inteiro, este será ímpar
- Se a divisão de um par por um par resultar em um inteiro, este poderá ser tanto par quanto ímpar
- A divisão de um número inteiro ímpar por um par nunca resulta em um número inteiro.

Multiplicidade, regras básicas de divisibilidade, fatoração em números primos.

A Multiplicidade pode ser explicada como a característica de um número ser múltiplo de outro, ou seja, resultar de multiplicação deste número por algum outro inteiro. Ou seja, se olharmos para uma tabuada infinita do número 4, encontraremos nos resultados todos os números múltiplos de 4.

Por sua vez, um número ser divisível por outro significa que a divisão deste pelo número inicial resulta em um inteiro e resto zero. Por exemplo, 12 é divisível por 4, pois esta divisão resulta em 3, um número inteiro, e o resto é zero.

Portanto, podemos dizer que a multiplicidade e a divisibilidade são dois lados da mesma moeda, pois descrevem a mesma relação, porém de maneira inversa.

Alguns números têm regras que tornam mais fácil identificar se outro valor pode ser dividido por ele ou não. As afirmações a seguir são muito utilizadas para otimizar o tempo e entender as relações ou padrões de questões.

Regra de divisibilidade do número 2: O último algarismo de um número deve ser divisível por 2, ou seja, o número deve ser par.

Regra de divisibilidade do número 3: A soma de todos os seus algarismos deve resultar em um número múltiplo de 3. Ex: $561 \rightarrow 5 + 6 + 1 = 12$

Regra de divisibilidade do número 4: Os dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Ex: $624 \rightarrow 24$ é divisível por 4, logo, 624 também é.

Regra de divisibilidade do número 5: O último algarismo do número deve ser 0 ou 5.

Regra de divisibilidade do número 6: O número deve ser divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo, ou seja, precisa ser par e ter a soma de seus algarismos múltipla de 3.

Regra de divisibilidade do número 8: Os três últimos algarismos devem formar um número divisível por 8.

Regra de divisibilidade do número 9: A soma de todos os seus algarismos deve resultar em um número múltiplo de 9. Ex: $198 \rightarrow 1 + 9 + 8 = 18$

Regra de divisibilidade do número 10: O último algarismo do número deve ser 0.

Alguns números não têm divisores além deles próprios e do número 1 (ex: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...). Estes são chamados de números primos, e são considerados os pilares que formam todos os outros números, pois todos podem ser escritos por uma multiplicação de números primos. Este processo, chamado de decomposição por números primos, é a base para a resolução de diversos problemas, e consiste em descobrir quais primos foram multiplicados para formar um número.

Para realizá-lo, inicia-se a verificar e a se dividir um número pelos menores números primos e aumentando os divisores até o resultado final ser 1. Por exemplo, vamos utilizar o número 420. Ele é divisível por 2, pois é par, o que gera o resultado 210. Este número ainda é divisível por 2, com resultado 105. Como os algarismos deste tem soma 6, ele também é divisível por 3, resultando em 35. Ele não é divisível por 3, mas é divisível pelo próximo primo, 5, resultando em 7. Como 7 também é primo, o resultado final será $7/7 = 1$.

Como dividimos por 2 duas vezes, por 3, por 5 e por 7, 420 também pode ser escrito como $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

1) Um gafanhoto pulando ao longo de uma reta pode pular 6 ou 8 polegadas em qualquer sentido. Ele pode alcançar um ponto que está:

- a) a 1,5 polegada da posição original?

b) A 7 polegadas

c) A 4 polegadas

2) Aline gosta de brincar de formar sequências de números. Hoje, ela brincou os números de 1 a 10, sem repetir nenhum. Ela considera uma sequência “vennerável” quando a soma de quaisquer números vizinhos têm a mesma paridade.

a) Complete a sequência a seguir, de modo que ela seja vennerável:

1 4 _ _ _ _ _

b) Apresente uma sequência vennerável que utilize os 10 números

c) Explique por que é impossível que exista uma sequência vennerável de 10 números que comece com 2 números de mesma paridade.

Resolução:

Uma sequência é "vennerável" quando a soma de quaisquer números vizinhos tem a mesma paridade (ou seja, todas as somas dão ímpar, ou todas as somas dão par).

- a)** A soma dos primeiros vizinhos ($1 + 4$) resulta em 5, que é ímpar. Para que a soma de qualquer par vizinho seja ímpar, é obrigatório intercalar números ímpares e pares (Ímpar + Par = Ímpar). Como a sequência começa com Ímpar (1), Par (4), ela deve continuar alternando: Ímpar, Par, Ímpar, Par, Ímpar. Possível resposta: 1, 4, 3, 2, 5, 6, 7 (Note que $4+3=7$, $3+2=5$, $2+5=7$, $5+6=11$, $6+7=13$; todas as somas são ímpares).
- b)** Basta seguir a regra de intercalar números ímpares e pares do 1 ao 10. Resposta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (Todas as somas de vizinhos resultarão em números ímpares).
- c)** Se a sequência começar com 2 números de mesma paridade (dois pares ou dois ímpares), a soma deles será Par. Para a sequência ser vennerável, todas as somas de vizinhos subsequentes também teriam que ser pares. Para que dois números somem par, eles precisam ter a mesma paridade. Isso criaria uma reação em cadeia exigindo que todos os 10 números tivessem a mesma paridade. Como de 1 a 10 temos apenas 5 números pares e 5 ímpares, é impossível formar uma sequência de 10 números só com pares ou só com ímpares.

3) Melissa e Antônia colhem flores em um jardim com um único cesto.

- Melissa sempre colhe 2 flores de cada vez.
- Antônia sempre colhe 6 flores de cada vez.

O cesto já continha 5 flores antes de começarem a colher.

- a)** Quantas flores terão no cesto após cada uma colher 2 vezes?
- b)** Qual será uma maneira de Melissa e Antônia colherem de forma que fiquem 15 flores no cesto?
- c)** Explique por que a cesta nunca ficará com 2026 pedaços após o fim da colheita.

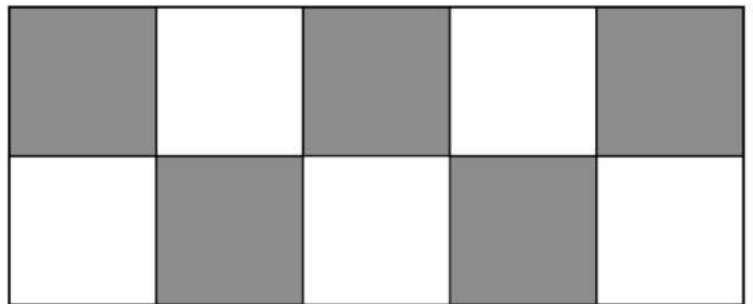
4) Pedro escreveu em seu caderno os números de 1 a 10 e colocou um sinal de adição entre eles, obtendo a soma: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

a) Qual é o valor dessa soma inicial? Esse valor é par ou ímpar?

b) Se Pedro trocar exatamente um sinal de adição por um sinal de subtração, a nova soma resultante será par ou ímpar? Justifique sua resposta.

c) Explique por que, mesmo trocando alguns sinais de adição por subtração, não é possível que o resultado da expressão seja 0.

5) Um tabuleiro retangular é dividido em 10 casas iguais, pintadas alternadamente de cinza e branco, como em um tabuleiro de xadrez. Inicialmente, há exatamente uma bolinha em cada casa. As bolinhas são movimentadas em etapas, seguindo às seguintes regras:



- Escolhe-se duas bolinhas quaisquer;
- Em seguida, desloca-se uma dessas bolinhas para uma casa vizinha na horizontal (para a esquerda ou para a direita) e, simultaneamente, desloca-se a outra bolinha para uma casa vizinha na vertical (para cima ou para baixo).

a) Descreva uma sequência de exatamente duas etapas de movimentos que resulte nas duas casas da primeira coluna (a mais à esquerda) totalmente vazias.

b) Explique por que, partindo do tabuleiro inicial e após qualquer número de etapas, a quantidade total de bolinhas ocupando as casas brancas do tabuleiro será sempre um número ímpar.

c) Explique por que é impossível, partindo do tabuleiro inicial, realizar uma série de etapas que coloque todas as 10 bolinhas em uma mesma casa.

Resolução:

a) Identificaremos as casas por coordenadas (Linha, Coluna). A primeira coluna possui as casas (1,1) e (2,1).

- **Etapá 1:** Escolha as bolinhas que estão em (1,1) e (2,1). Mova a bolinha de (1,1) na horizontal para a casa vizinha (1,2). Mova a bolinha de (2,1) na vertical para a casa (1,1). *Resultado:* A casa (2,1) fica vazia. A casa (1,1) agora tem 1 bolinha (a que veio de baixo).
- **Etapá 2:** Escolha a bolinha que está agora em (1,1) e qualquer outra bolinha no resto do tabuleiro (por exemplo, a de (2,2)). Mova a bolinha de (1,1) na horizontal para (1,2). Mova a bolinha de (2,2) na vertical para (1,2). *Resultado:* Ambas as casas da primeira coluna (1,1) e (2,1) estão totalmente vazias.

b) No tabuleiro, qualquer movimento para uma casa vizinha (seja vertical ou horizontal) faz com que a bolinha mude para uma casa de cor diferente. Em cada etapa, exatas 2 bolinhas se movem (e ambas mudam de cor). Existem três cenários possíveis para essas duas bolinhas em um turno:

1. Ambas estavam no branco: movem-se para o cinza. (Bolinhas no branco variam -2).
2. Ambas estavam no cinza: movem-se para o branco. (Bolinhas no branco variam +2).
3. Uma no branco e uma no cinza: a branca vai pro cinza (-1) e a cinza vai pro branco (+1). (A variação líquida é 0). Como a variação no número de bolinhas nas casas brancas será sempre um número par (+2, -2 ou 0), a paridade (ser par ou ímpar) nunca muda. Como iniciamos o jogo com 5 bolinhas em casas brancas (um número **ímpar**), essa quantidade continuará ímpar para sempre, não importa o número de etapas.

c) Se fosse possível colocar as 10 bolinhas em uma única casa, essa casa específica seria Branca ou Cinza.

- Se for uma casa Branca, haveria 10 bolinhas em casas brancas (10 é um número **par**).
- Se for uma casa Cinza, haveria 0 bolinhas em casas brancas (0 é um número **par**). No entanto, conforme demonstrado no item anterior, o número de bolinhas em casas brancas é invariável e será **sempre ímpar**. Portanto, é matematicamente impossível chegar a um cenário com 10 ou 0 bolinhas na cor branca.

A.4 Números especiais

→ Problemas desse tipo normalmente definem um “número especial” (número legal, famoso, interessante etc.) que deve satisfazer certas propriedades envolvendo seus algoritmos.

→ As principais ideias utilizadas são:

- divisibilidade;
- análise de casos;
- propriedades dos algoritmos;
- organização lógica.

Questão 1: OBMEP 2018 — Nível 2 — Fase 2 — Questão 2

Um número inteiro positivo é chamado interessante quando termina com um algarismo que é igual ao produto de seus demais algarismos.

Exemplos:

- 326 é interessante, pois:
 $3 \times 2 = 6$
- 1020 é interessante, pois:
 $1 \times 0 \times 2 = 0$

a) Quantos números interessantes de dois algarismos existem?

Resolução:

Um número de dois algarismos possui a forma:

$$10a + b$$

Para ser interessante:

$$a = b$$

pois o último algarismo deve ser igual ao produto dos anteriores, e há apenas um algarismo anterior.

Logo, os números são:

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 e 99.

Portanto, existem:

9 números.

Resposta: 9

b) Quantos números interessantes de três algarismos existem?

Resolução:

Um número de três algarismos possui a forma:

$$100a + 10b + c$$

A condição da questão é:

$$ab = c$$

Como c é um algarismo, devemos ter:

$$ab \leq 9$$

Agora analisamos os casos.

Caso $a = 1$

b pode ser:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Total:

10 casos.

Caso $a = 2$

$$2b \leq 9$$

Então:

$b = 0, 1, 2, 3, 4$

Total:

5 casos.

Caso $a = 3$

$$3b \leq 9$$

Então:

$b = 0, 1, 2, 3$

Total:

4 casos.

Caso $a = 4$

$$4b \leq 9$$

Então:

$b = 0, 1, 2$

Total:

3 casos.

Casos $a = 5, 6, 7, 8, 9$

Em todos:

$b = 0$ ou 1

Total:

2 casos para cada valor de a .

Assim:

$$10 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 32$$

Resposta: 32

Observação:

A principal ideia da questão é perceber que o produto dos algarismos precisa continuar sendo um único algarismo, o que reduz muito os casos possíveis.

Atente-se a questões como essa, uma vez que exercícios como esse são recorrentes, em especial, na segunda fase da OBMEP!

Questão 2: OBMEP 2023 — Nível 2 — Fase 2 — Questão 1

Aninha possui cartões numerados de 1 a 9. Ela forma sequências colocando alguns cartões lado a lado.

Uma sequência é chamada especial quando, para quaisquer dois cartões vizinhos, um dos números é múltiplo do outro.

a) Encontre uma sequência especial com 7 cartões começando com 6 e 2.

Resolução:

Precisamos garantir que quaisquer dois vizinhos satisfaçam:

- um é múltiplo do outro.

Uma sequência válida é:

6, 2, 4, 8, 1, 3, 9

Verificando:

- 6 é múltiplo de 2;
- 4 é múltiplo de 2;
- 8 é múltiplo de 4;
- todo número é múltiplo de 1;
- 9 é múltiplo de 3.

Portanto, a sequência é válida.

b) Explique por que é impossível formar uma sequência especial com os 9 cartões.

Resolução:

Observe os números 5 e 7.

O número 5:

- não é múltiplo de nenhum outro número entre 1 e 9;
- só possui relação com o número 1.

O mesmo acontece com o número 7.

Assim:

- o 5 precisa ficar ao lado do 1;
- o 7 também precisa ficar ao lado do 1.

Mas o 1 possui apenas dois lados disponíveis.

Logo, o 1 ficaria “preso” entre 5 e 7:

5 – 1 – 7

Não sobra espaço para conectar todos os outros números na mesma sequência.

Portanto, é impossível construir uma sequência especial utilizando os 9 cartões.

Resposta: É impossível.

Questão 3: OBMEP 2025 — Nível 2 — Fase 2 — Questão 4

Um número é chamado especial quando é formado apenas pelos algarismos 0, 2 e 5.

Emiliano escreveu todos os números especiais em ordem crescente, começando em 0 e terminando em 2025.

Quantos números Emiliano escreveu?

Resolução:

Precisamos contar todos os números formados apenas pelos algarismos:

0, 2 e 5

que sejam menores ou iguais a 2025.

Números com 1 algarismo:

Possibilidades: 0, 2, 5

Total: 3 números.

Números com 2 algarismos:

O primeiro algarismo não pode ser 0.

Primeiro algarismo:

2 opções:

2 ou 5.

Segundo algarismo:

3 opções:

0, 2 ou 5.

Total:

$2 \times 3 = 6$ números.

Números com 3 algarismos:

Primeiro algarismo: 2 opções.

Os outros dois: 3 opções cada.

Total: $2 \times 3 \times 3 = 18$ números.

Números com 4 algarismos menores ou iguais a 2025:

O primeiro algarismo deve ser 2, pois números começando com 5 ultrapassariam 2025.

Agora analisamos os demais algarismos.

Temos: 2abc

com: $a, b, c \in \{0, 2, 5\}$

e: $2abc \leq 2025$

Se o segundo algarismo for 0:

Temos: 20bc

Ou seja:

bc pode ser: 00, 02, 05, 20, 22, 25

pois: 2052 e 2055 ultrapassam 2025.

Total: 6 números.

Se o segundo algarismo for 2:

Temos: 22bc

Todos ultrapassam 2025.

Logo: 0 casos.

Se o segundo algarismo for 5:

Também ultrapassam 2025.

Logo: 0 casos.

Total geral:

$$3 + 6 + 18 + 6 = 33$$

Resposta: 33

Problema 1: “Número legal”

O professor Igor passou aos seus alunos a missão de descobrir quais os números podem ser considerados legais. O aluno que acertou o exercício passado pelo professor foi Gabriel, visto que já havia se preparado para questões como essa a partir da apostila de matemática do Time Venn. As instruções do professor diziam que um número de 4 algarismos é chamado legal quando:

- os algarismos são distintos;
- o último algarismo é igual ao produto dos outros três.

Qual foi a resposta obtida por Gabriel?

Resolução:

Precisamos de números em que:

$$a \times b \times c = d$$

com:

- d sendo um algarismo;
- todos os algarismos distintos.

Como d é um algarismo, devemos ter:

$$abc \leq 9$$

Agora analisamos os produtos possíveis.

Produto 0:

Um dos três primeiros Algarismos deve ser 0.

Exemplo:

1020

Mas não podemos repetir Algarismos.

Produto 1:

Só seria possível com:

$$1 \times 1 \times 1$$

Mas há repetição.

Inválido.

Produto 2:

Só seria possível com:

$$1 \times 1 \times 2$$

Há repetição.

Inválido.

Produto 6:

Temos:

$$1 \times 2 \times 3 = 6$$

Os três primeiros Algarismos podem ser organizados de:

$$3! = 6 \text{ formas.}$$

Logo: 6 números.

Produto 8:

Temos:

$$1 \times 2 \times 4 = 8$$

Novamente:

$$3! = 6$$

formas.

Logo: 6 números.

Total:

$$6 + 6 = 12$$

Resposta: 12

Problema 2: “Número escalonado”

Ana Margarida, uma garota muito esperta, no processo de preparação para a OBMEP, imaginou-se como criadora das questões da prova. A questão que elaborou enquanto pensava foi a seguinte:

Um número de 5 algarismos é chamado escalonado quando:

- cada algarismo é múltiplo do anterior;
- todos os algarismos são distintos;
- nenhum algarismo é zero.

Existe algum número escalonado?

Resolução:

Precisamos de:

$$a \mid b \mid c \mid d \mid e$$

com todos distintos entre 1 e 9.

A maior cadeia possível é:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$$

Depois disso:

- 8 não possui múltiplos distintos entre 1 e 9.

Assim, não conseguimos formar uma cadeia com 5 algarismos distintos.

Resposta: Não existe nenhum número escalonado.

Problema 3: “O número secreto”

Bernardo pensou em um número de 5 algarismos.

Emanuel percebeu que:

- todos os algarismos eram diferentes;
- os algarismos estavam em ordem crescente.

Leo descobriu ainda que:

- a soma dos algarismos era 19.

Quantos números poderiam ser o número secreto de Bernardo?

Resolução:

Como os algarismos estão em ordem crescente, cada conjunto de 5 algarismos distintos gera exatamente um número.

Precisamos encontrar conjuntos de 5 algarismos distintos cuja soma seja 19.

Passo 1: Começando com 0

Se o menor algarismo é 0, precisamos: $a + b + c + d = 19$

com: $0 < a < b < c < d$

Possibilidades:

0, 1, 2, 7, 9
0, 1, 2, 8, 8 ✗
0, 1, 3, 6, 9
0, 1, 3, 7, 8
0, 1, 4, 5, 9
0, 1, 4, 6, 8
0, 1, 5, 6, 7
0, 2, 3, 5, 9
0, 2, 3, 6, 8
0, 2, 3, 7, 7 ✗
0, 2, 4, 5, 8
0, 2, 4, 6, 7
0, 3, 4, 5, 7

Total:

11 conjuntos válidos.

Passo 2: Começando com 1

Tem-se: $1 + a + b + c + d = 19$

Logo: $a + b + c + d = 18$

com: $1 < a < b < c < d$

Possibilidades:

1, 2, 3, 4, 9

1, 2, 3, 5, 8

1, 2, 3, 6, 7

1, 2, 4, 5, 7

1, 3, 4, 5, 6

Total:

5 conjuntos.

Passo 3: Começando com 2

O menor conjunto possível seria: 2, 3, 4, 5, 6

A soma é: 20 (o que já ultrapassa 19).

Logo, não existem outros casos.

Total final: $11 + 5 = 16$

Resposta: Existem 16 possíveis números secretos.

B. Álgebra

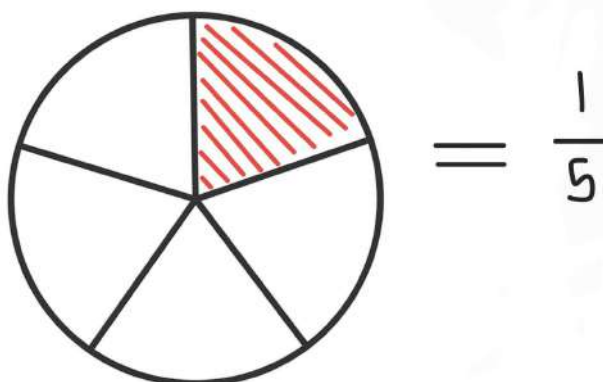
B.1 Operações Básicas e Frações

O que são frações?

Antes de começarmos a fazer contas e definir diversas operações, vamos responder uma pergunta fundamental: **o que são frações?**

Pense na seguinte situação: você vai realizar uma comemoração com seus amigos após um ótimo resultado na OBMEP. No total são 5 pessoas e vocês, em conjunto, decidem pedir uma pizza. Como será feita a divisão de 1 pizza para 5 pessoas? Não é possível 1

uma pessoa só conseguir todos os pedaços e, obviamente, não é viável ninguém pegar fatia alguma. Para realizar uma divisão satisfatória, podemos separar a pizza em cinco partes iguais e distribuir cada parte para uma pessoa.



Matematicamente, dizemos que cada um recebeu $\frac{1}{5}$ (lê-se “um quinto” ou “um sobre cinco”) da pizza. Nesse novo formato de número que iremos estudar, o termo de cima se chama **numerador** e o termo embaixo se chama **denominador**.

O denominador indica em quantas partes iguais o inteiro foi dividido. O numerador indica quantas dessas partes foram consideradas.

Frações são divisões?

No exemplo anterior, dividimos uma pizza em cinco partes iguais. Cada pessoa recebeu uma dessas partes, isto é, recebeu $\frac{1}{5}$ da pizza.

Observe que a fração $\frac{1}{5}$ também pode ser interpretada como uma divisão. Assim:

$$\frac{1}{5} = 1 \div 5$$

De modo geral, a barra de uma fração representa uma divisão do tipo:

$$\frac{a}{b} = a \div b$$

onde $b \neq 0$.

A condição $b \neq 0$ é necessária porque **não existe divisão por zero**. Por exemplo, na equação

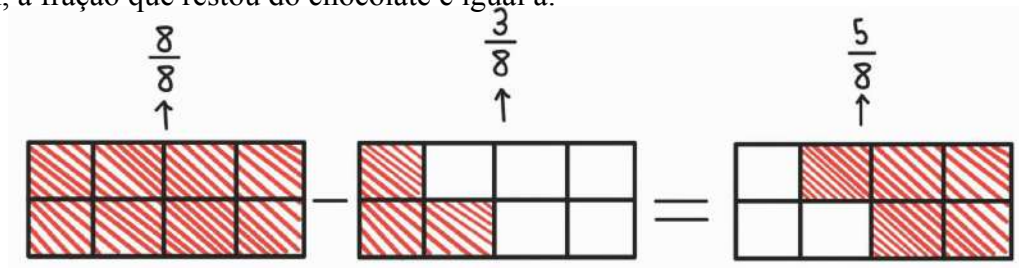
$$x = \frac{1}{0}$$

x corresponderia à divisão $1 \div 0$. Para que essa divisão tivesse um resultado, deveria existir um número x que, multiplicado por 0, fosse igual a 1. Entretanto, qualquer número multiplicado por 0 é igual a 0. Portanto, $\frac{1}{0}$ não possui um valor definido.

Assim, **toda fração possui um denominador diferente de zero**.

Exemplo: André Aredes é um rapaz que gosta muito de comer chocolates. Sua mãe comprou uma barra de chocolate para ele degustar após o almoço. Se ele comeu $\frac{3}{8}$ da barra, quantas partes sobraram?

Resolução: Note que André Aredes dividiu a barra em oito partes iguais e comeu 3 pedaços. Assim, a fração que restou do chocolate é igual à:



De fato, dos oito pedaços, cinco não foram comidos;

Frações menores, iguais ou maiores que um inteiro

Fração própria

Fração própria é aquela em que o numerador (número na parte de cima) é menor que o denominador (número na parte de baixo). Nesses casos a fração representa um valor menor que um inteiro, ou seja, maior que zero e menor que um.

Por exemplo:

$$\frac{7}{10} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{3}{8}$$

Fração aparente

Fração aparente é aquela em que o numerador (número na parte de cima) é múltiplo do denominador (número na parte de baixo). Também, podemos pensar que o resultado do numerador pelo denominador representa um número inteiro.

Por exemplo:

$$\frac{6}{3} = 2 \quad \frac{10}{2} = 5 \quad \frac{16}{4} = 4$$

Fração imprópria

Fração imprópria é aquela em que o numerador (número na parte de cima) é maior que o denominador (número na parte de baixo). Por isso, a fração irá representar uma quantidade maior que 1.

Por exemplo:

$$\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4}$$

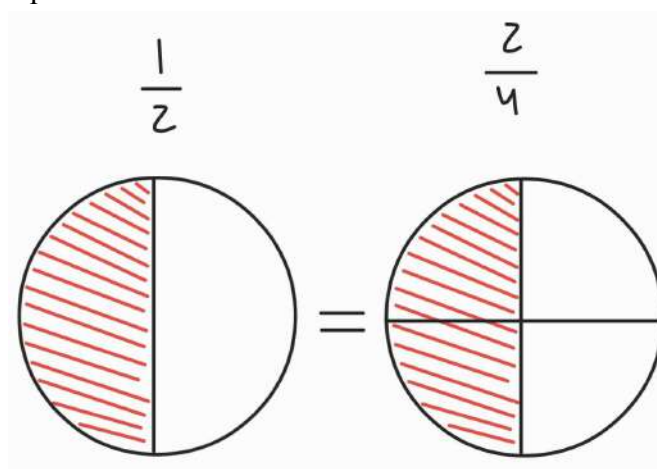
$$\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$$

A expressão $1\frac{3}{4}$ é chamado de **número misto**.

Fração equivalente

Pense na seguinte situação: temos um bolo e queremos dividi-lo em duas partes iguais e pegar uma das metades. Nessa ocasião, teremos $\frac{1}{2}$ do bolo. Agora, imagine que dividimos cada metade em outras duas partes iguais e queremos pegar a mesma quantidade que pegamos inicialmente. Assim, teremos quatro partes iguais e, para pegar metade, precisamos pegar duas dessas porções, resultando em $\frac{2}{4}$ do bolo.

Com base no exemplo acima, perceba que as duas frações são equivalentes, ou seja, são duas frações que são formadas por numeradores e denominadores diferentes, mas que representam a mesma quantidade.



Como simplificar frações?

Retomando o exemplo da seção anterior, perceba que a fração $\frac{1}{2}$ é equivalente à fração $\frac{2}{4}$ escrita com números menores. No caso, para mostrar isso, podemos realizar a seguinte operação:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$$

Assim, ao dividirmos o numerador e o denominador da fração por 2, conseguimos achar a **forma simplificada** de $\frac{2}{4}$.

Quando o numerador e o denominador não possuem divisores comuns maiores que 1, dizemos que a fração é **irredutível**. Portanto, como o máximo divisor comum de 1 e 2 é o próprio número 1, dizemos que a fração $\frac{1}{2}$ é irredutível.

Outros exemplos:

$$\frac{18}{4} = \frac{18 \div 2}{4 \div 2} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{20}{5} = \frac{20 \div 5}{5 \div 5} = \frac{4}{1} = 4$$

Adição de frações

Para estudar como a adição de frações funciona, iremos dividir em dois casos: frações com denominadores iguais e frações com denominadores diferentes.

Denominadores iguais

Considere o caso abaixo:

$$\frac{7}{9} + \frac{11}{9}$$

Temos sete nonos mais onze nonos. Portanto:

$$\frac{7}{9} + \frac{11}{9} = \frac{11+7}{9} = \frac{18}{9} = \frac{18 \div 9}{9 \div 9} = 2$$

Lembre-se que, sempre que possível, simplificar a fração é uma etapa fundamental. Na operação acima, somamos os numeradores e conservamos o denominador. O denominador não é somado, pois ele representa o “tamanho” das partes, como o “tamanho” não mudou, ele permanece igual. De modo geral, temos:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Denominadores diferentes

Atente-se ao exemplo abaixo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Não podemos somar as duas frações diretamente, pois meios e terços representam “tamanhos diferentes”. O truque nesse caso é igualar os dois denominadores, por meio de um menor múltiplo comum (MMC) a fim de transformar as partes em partes de mesmo tamanho.

Como o MMC de 2 e 3 é o número 6, podemos, primeiramente, realizar a seguinte operação:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

e

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

Agora, podemos somar os dois termos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Um fato importante: em uma fração, toda operação feita no numerador deve também ser feita no denominador, e vice-versa. Para obter uma fração equivalente, devemos multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número diferente de zero.

O leitor deve-se atentar para não cometer um erro comum, pois a soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$$

é uma operação **incorreta**. Lembre-se que, antes de somarmos duas frações, devemos realizar o MMC entre os denominadores.

Subtração de frações

A subtração de frações segue um raciocínio semelhante à adição de frações. Por isso, se os denominadores são iguais:

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Se os denominadores são diferentes, devemos encontrar frações equivalentes com o mesmo denominador e, a partir disso, realizar a subtração dessas frações. Por exemplo:

$$\frac{7}{5} - \frac{1}{2}$$

Como o MMC de 5 e 2 é o número 10, temos que:

$$\frac{7}{5} = \frac{7 \times 2}{5 \times 2} = \frac{14}{10}$$

e

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$$

Portanto, a subtração em questão é igual a:

$$\frac{7}{5} - \frac{1}{2} = \frac{14}{10} - \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$$

Exemplo: Melissa e Antônia são duas amigas que gostam muito de beber suco de uva. Em um certo dia, pela manhã, Melissa bebeu $\frac{1}{4}$ do conteúdo da garrafa de suco que havia comprado no dia anterior. Mais tarde, Antônia bebeu $\frac{1}{3}$ do conteúdo inicial.

- Que fração do suco foi bebida?
- Qual fração do suco restou na garrafa?

Resolução: Temos que

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

Portanto, foi bebida a fração $\frac{7}{12}$.

Como o conteúdo total corresponde a $\frac{12}{12}$, restou

$$\frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

Assim, permaneceram na garrafa

$$\frac{5}{12}$$

do conteúdo inicial.

Multiplicação de frações

A multiplicação de frações pode ser entendida como o **cálculo de uma parte com uma parte**, ou seja, numerador com numerador e denominador com denominador.

Para clarear essa ideia, considere, por exemplo, a seguinte expressão:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$

Podemos interpretá-la por meio da seguinte pergunta:

→ Quanto são $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$?

Para calcular, multiplicamos os numeradores e denominadores entre si:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

De modo geral:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

onde $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

Exemplo: Quanto são $\frac{4}{5}$ de 20?

Resolução: Podemos escrever 20 na forma de fração

$$\frac{4}{5} \times \frac{20}{1} = \frac{4 \times 20}{5 \times 1} = \frac{80}{5} = 16$$

O leitor pode ter percebido que, inicialmente, poderíamos ter simplificado o número 5 no denominador da primeira fração com o número 20 no numerador da segunda fração. De fato:

$$\frac{4}{5} \times \frac{20}{1} = \frac{4}{1} \times \frac{20}{5} = \frac{4}{1} \times \frac{4}{1} = 16$$

Quando possível, simplificações iniciais antes das multiplicações podem ser poderosas ferramentas para facilitar os cálculos em questões com grandes números.

Inverso multiplicativo

O inverso multiplicativo (ou recíproco) de um número é o valor que, quando multiplicado por esse número, resulta na unidade, ou seja, no número 1. Por exemplo, o inverso multiplicativo de 2 é $\frac{1}{2}$, pois:

$$2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Qual o inverso multiplicativo de $\frac{5}{3}$? Ora, nesse caso é o número $\frac{3}{5}$, uma vez que:

$$\frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{5}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 1$$

Assim, para encontrar o inverso multiplicativo de uma fração, basta trocar a posição do numerador pela posição do denominador.

O inverso de $\frac{a}{b}$ é a fração $\frac{b}{a}$

Desde que $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

O número 0 possui inverso multiplicativo?

Perceba, caro leitor, que para que um número seja inverso de 0, deveria ocorrer:

$$0 \times x = 1$$

No entanto, todo número multiplicado por 0 é igual à 0. Portanto, é impossível obter 1, e concluímos que o número zero não possui inverso multiplicativo.

Divisão de frações

Como vimos anteriormente, o inverso multiplicativo de um número é aquele valor que, multiplicado pelo número original, o resultado é igual a 1. Essa ideia é a base para realizarmos a divisão entre frações.

Veremos que a divisão de frações é, na verdade, uma multiplicação pelo inverso multiplicativo de um número.

Dividindo frações

Considere o exemplo abaixo:

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{6}}$$

A divisão acima pode ser interpretada por meio da seguinte pergunta:

→ Quantas vezes partes de $\frac{2}{6}$ cabem em $\frac{4}{3}$

Para realizarmos essa divisão, mantemos a primeira fração e multiplicamos ela pelo inverso multiplicativo da segunda. Como o inverso de $\frac{2}{6}$ é $\frac{6}{2}$, temos:

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{6}} = \frac{4}{3} \times \frac{6}{2} = \frac{4 \times 6}{3 \times 2} = \frac{24}{6} = 4$$

De modo geral:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

onde $b \neq 0$, $d \neq 0$ e $c \neq 0$.

Sempre que possível, a simplificação das frações antes da divisão pode ser feita para facilitar os cálculos.

A condição $c \neq 0$ é necessária, pois não podemos realizar uma divisão por 0.

Por que multiplicamos pelo inverso?

Vamos observar a expressão:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

Podemos representá-la por uma fração:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Para transformar o denominador deste termo em 1, devemos multiplicar o denominador e o numerador dessa expressão por $\frac{d}{c}$. Assim:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}}$$

Como a multiplicação de uma fração não nula pelo seu inverso multiplicativo é igual a 1. Obtemos, portanto:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Portanto, dividir por uma **fração** é equivalente a multiplicar pelo **inverso multiplicativo** dessa fração.

Exercícios de fixação

$$1) \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = ? \quad 2) \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = ? \quad 3) \frac{5}{6} + \frac{1}{3} = ? \quad 4) \frac{3}{5} + \frac{7}{10} = ? \quad 5) \frac{2}{9} + \frac{5}{12} = ?$$

$$6) \frac{6}{7} - \frac{2}{7} = ? \quad 7) \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = ? \quad 8) \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = ? \quad 9) \frac{11}{12} - \frac{5}{18} = ? \quad 10) \frac{9}{10} - \frac{7}{15} = ?$$

$$11) \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = ? \quad 12) \frac{4}{7} \times \frac{7}{8} = ? \quad 13) \frac{5}{6} \times \frac{9}{10} = ? \quad 14) \frac{3}{11} \times \frac{22}{9} = ? \quad 15) \frac{7}{12} \times \frac{18}{35} = ?$$

$$16) \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = ? \quad 17) \frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = ? \quad 18) \frac{5}{6} \div \frac{10}{9} = ? \quad 19) \frac{7}{8} \div \frac{14}{3} = ? \quad 20) \frac{9}{10} \div \frac{3}{5} = ?$$

Exercícios propostos

(OBMEP 2º fase 2025 - Nível 1) Uma academia possui vários equipamentos de ginástica para seus atletas. Uma pesquisa feita nessa academia mostrou que somente 8 em cada 14 atletas utilizam a bicicleta (8/14 do total de atletas). A pesquisa mostrou também que somente 20 em cada 42 atletas utilizam a esteira (20/42 do total de atletas).



a) Qual é a fração do total de atletas dessa academia que não utiliza a bicicleta? E a fração do total de atletas que não utiliza a esteira?

b) Explique por que nessa academia há atletas que utilizam bicicleta e também esteira.

c) A pesquisa mostrou que todos os atletas que utilizam a esteira também utilizam a bicicleta. Ela mostrou ainda que somente 10 atletas utilizam a bicicleta, mas não a esteira. Quantos atletas não utilizam a bicicleta?



(OBMEP 2º fase 2022 - Nível 1) Alice, Beatriz e Cláudia moram em uma rua de 200 metros de comprimento. Alice mora no início da rua, Beatriz a 80 metros de Alice e Cláudia no final da rua. Elas se encontram de vez em quando, sempre partindo de suas casas.

a) Qual é a soma das distâncias que Alice e Beatriz percorrem quando elas se reúnem na casa de Cláudia?

b) Se Alice, Beatriz e Cláudia se encontrarem na rua a 150 metros do seu início, qual será a soma das distâncias que elas percorrerão?

c) As três amigas decidem se encontrar em algum ponto da rua tal que a soma das distâncias percorridas por elas seja a menor possível. A quantos metros do início da rua elas devem se encontrar?

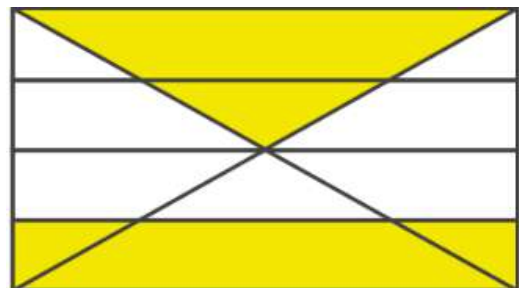
(OBMEP 2º fase 2021 - Nível 1) Joãozinho fez todas as divisões possíveis com dois números diferentes pertencentes ao conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Por exemplo, com os números 2 e 5, ele fez as seguintes divisões: $\frac{2}{5}$ (obteve como resultado 0,4) e $\frac{5}{2}$ (obteve como resultado 2,5).

a) Em quantas divisões Joãozinho obteve como resultado um número inteiro?

b) Em quantas divisões Joãozinho obteve como resultado um número maior do que 0,5?

c) Quantos resultados diferentes foram obtidos por Joãozinho?

(OBMEP 1º fase 2023 - Nível 1) Os segmentos horizontais dividem o retângulo da figura em quatro faixas de mesma largura. A área da região amarela corresponde a qual fração da área do retângulo?



- a) $1/3$
- b) $5/12$
- c) $1/2$
- d) $7/12$
- e) $2/3$

B.2 Utilizando incógnitas

Utilizar incógnitas é uma das ferramentas mais importantes para resolver problemas de matemática, especialmente em olimpíadas como a OBMEP. A ideia é transformar um texto em uma equação.

O que é uma incógnita?

Uma incógnita é uma letra qualquer (geralmente x , y , n , etc.) que representa um número desconhecido.

Por exemplo:

- "Pensei em um número e somei-o a 8, obtendo 20." Se o número é x , então:

$$x + 8 = 20$$

$$x = 20 - 8$$

$$x = 12$$

- **Como transformar um problema em equação?**

O primeiro passo é escolher uma incógnita. Pergunte:

O que eu não sei?

Esse valor se transformará em uma letra.

Exemplo:

"A idade de Ana é desconhecida."

Defina:

x = idade de Ana

O segundo passo é escrever as informações usando a letra. Exemplo:

"Bruno tem 5 anos a mais que Ana."

Então:

Idade de Bruno = $x + 5$

Agora, vamos montar a equação. Se o problema diz:

"A soma das idades é 31."

Então:

$$x + (x + 5) = 31$$

Agora basta resolver.

$$x + x + 5 = 31$$

$$2x + 5 = 31$$

$$2x = 26$$

$$x = 13$$

Ana possui 13 anos.

Exercícios de fixação:

a) Um número aumentado de 8 é igual ao dobro desse número menos 5. Qual é o número?

b) A soma de um número com seu triplo é 44. Qual é esse número?

c) A diferença entre o dobro de um número e o próprio número é 17. Qual é esse número?

d) O dobro de um número, somado a 3, é igual a 19. Qual é o número?

e) O triplo de um número menos 2 é igual a 19. Qual é o número?

f) A metade de um número é 14. Qual é esse número?

g) A idade de Carlos é 4 anos maior que a de Pedro. A soma das idades dos dois é 28 anos. Qual é a idade de Pedro?

h) Um número, somado à sua metade, é igual a 36. Qual é esse número?

i) Em uma caixa há bolas azuis e vermelhas. Existem 4 bolas vermelhas a mais que azuis. Ao todo são 22 bolas. Quantas bolas azuis há?

j) A soma de três números consecutivos é 72. Qual é o menor deles?

k) A soma de quatro números consecutivos é 58. Qual é o menor deles?

l) Em uma fazenda há galinhas e patos. Há 12 patos a mais que galinhas. Ao todo são 48 animais. Quantas galinhas há?

m) A idade de um pai é o triplo da idade de seu filho. Juntos eles têm 52 anos. Qual é a idade do filho?

n) Em uma competição, Antônia fez 15 pontos a mais que Melissa. Juntas fizeram 79 pontos. Quantos pontos Melissa fez?

o) Uma corda foi dividida em duas partes. A maior mede o dobro da menor mais 2 metros. Sabendo que a corda inteira mede 35 metros, quanto mede a menor parte?

p) Em uma biblioteca, o número de livros de História é o triplo do número de livros de Geografia. Juntos são 96 livros. Quantos livros de Geografia existem?

q) Um número somado ao seu dobro e ao seu triplo resulta em 90. Qual é esse número?

r) Uma pessoa gastou metade do dinheiro que tinha e depois mais R\$ 20. Restaram R\$ 40. Quanto ela possuía inicialmente?

Gabarito:

a) 13

b) 11

c) 17

d) 8

e) 7

f) 28

g) 12

h) 24

i) 9

j) 23

k) 11

l) 18

m) 13

n) 32

o) 11

p) 24

q) 15

r) 120

Resolução guiada (use de inspiração para resolver as questões de A a R)

a)

1. Definir a incógnita e montar a equação

Seja X o número desconhecido.

O enunciado diz: “Um número aumentado a 8”, logo, $X + 8$;

O dobro desse número, então, é $2X$. O dobro menos 5 é $2X - 5$.

$$X + 8 = 2X - 5$$

2. Resolver a equação

Isole X.

Sempre, ao passar um membro da equação para o outro lado da igualdade, é necessário inverter o sinal (mais “vira” menos, menos “vira” mais, multiplicação “vira” divisão e divisão “vira” multiplicação.)

$$8 + 5 = 2X - X$$

$$X = 13$$

b)

1. Definir a incógnita e montar a equação

Seja X o número desconhecido.

O enunciado diz: "A soma de um número com seu triplo", logo, $X + 3X$

$$X + 3X = 44$$

2. Resolver a equação

Some os termos semelhantes:

$$4X = 44$$

Agora, transforme a multiplicação em divisão, mudando o número de lado na igualdade.

$$X = 44 \div 4$$

$$X = 11$$

c)

1. Definir a incógnita e montar a equação

Seja X o número desconhecido.

O enunciado diz: "O dobro de um número", logo, $2X$;

"menos o próprio número", então, $-X$

$$2X - X = 17$$

2. Resolver a equação

Subtraia os termos semelhantes:

$$X = 17$$

d)

1. Definir a incógnita e montar a equação

Seja X o número desconhecido.

O enunciado diz: "O dobro de um número", logo, $2X$;

"somado a 3", então, $2X + 3$.

$$2X + 3 = 19$$

2. Resolver a equação

Passe o 3 para o outro lado da igualdade, invertendo o sinal

$$2X = 19 - 3$$

$$2X = 16$$

Agora, transforme a multiplicação em divisão, mudando o número de lado na igualdade.

$$X = 16 \div 2$$

$$X = 8$$

Questões estilo olímpicas:

- 1) Um professor escreve números do lado externo de um tabuleiro 3x3, sendo um número para cada linha e um número para cada coluna. Ele pede que os alunos preencham cada quadradinho do tabuleiro com a soma do valor de sua linha com o de sua coluna. A figura abaixo mostra um exemplo.

	8	14	6
9	17	23	15
4	12	18	10
11	19	25	17


 $11 + 8 = 19$

- a) Preencha o tabuleiro abaixo como o professor pediu.

	6	12	20
8			
14			
18			

- b) Um aluno preencheu cinco quadradinhos do tabuleiro e apagou os números externos, como indicado abaixo. Termine de preencher esse tabuleiro.

15		6
		16
22	28	

- c) Se o tabuleiro abaixo for totalmente preenchido, a soma de todos os nove números será 180. Qual é o número que deverá aparecer no quadradinho marrom?

		
	21	
		26

2) Na lendária Biblioteca de Alexandria, os livros foram organizados em uma grande estante com 4 prateleiras e 25 nichos por prateleira, numerados sequencialmente de 1 a 100, da seguinte maneira:

- 1ª prateleira (Topo): Números de 1 a 25 (da esquerda para a direita).
- 2ª prateleira: Números de 26 a 50 (da esquerda para a direita).
- 3ª prateleira: Números de 51 a 75 (da esquerda para a direita).
- 4ª prateleira (Base): Números de 76 a 100 (da esquerda para a direita).



Um terremoto derrubou o gesso da parede e revelou apenas pequenas janelas da estante.

- a) Em uma das partes visíveis da estante, um bibliotecário encontrou o livro de número 19. Na mesma janela, duas colunas à esquerda e duas linhas abaixo, está o livro de posição X.

19		
		X

Qual é o valor de X?

- b) Em outro trecho da estante, a poeira cobriu a maioria dos números, deixando visíveis apenas três posições representadas pelas variáveis A, B e C
- A está na 1ª prateleira numa determinada coluna;
 - B está na 2ª prateleira, 1 coluna à direita de A;
 - C está na 4ª prateleira, 3 colunas à esquerda de A.

Sabendo que os números das posições A, B e C possuem um divisor comum $d > 1$ (um mesmo número que divide todos eles exatamente):

Qual é o único valor possível para esse divisor d?

- c) Com base nas informações do item b):
- Quais são os possíveis valores para a posição A?

3) Pedro gosta de criar números de 3 algarismos da forma ABA, chamados palíndromos de três dígitos (como 121, 353 ou 707), em que o primeiro e o último algarismo são iguais. Para o seu jogo, ela escolhe dois algarismos não nulos e diferentes entre si, A e B (A diferente de B) e monta a seguinte soma trocando as posições dos algarismos:

$$\text{Soma} = \text{ABA} + \text{BAB}$$

(Por exemplo, escolhendo $A = 2$ e $B = 5$, a soma será $252 + 525 = 777$.)

- Determine um exemplo de par de números ABA e BAB cuja soma resulte em um número de 4 algarismos tal que a soma de todos os seus dígitos seja igual a 18.
- Quantas somas diferentes do tipo $\text{ABA} + \text{BAB}$ resultam em um número cujo último algarismo é 7?
- Explique por que é impossível que a soma $\text{ABA} + \text{BAB}$ resulte em um número de 4 algarismos em que todos os seus dígitos sejam pares.

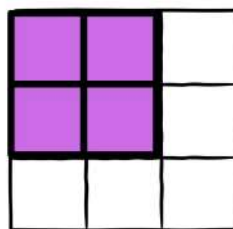
4) No tabuleiro abaixo, cada letra da palavra CAMISA representa um número inteiro de 1 a 10. Letras diferentes representam números diferentes. Além disso, cada número escrito na lateral do tabuleiro é a soma dos valores das letras da linha horizontal correspondente.

21	C	A	S	I
16	M	M	M	M
20	M	I	I	M
15	I	S	S	S

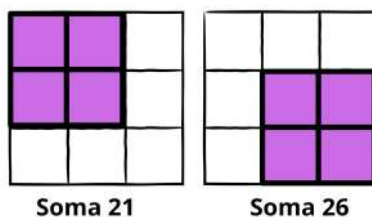
- Encontre o valor da letra M.
- Encontre o valor da letra I.
- Encontre o valor da letra S.
- Quais os possíveis valores que A e C podem assumir?

5) Antônio preenche quadriculados 3×3 com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, sem repetir nenhum deles.

- Antônio preencheu um quadriculado de forma que os quatro números escritos no quadrado 2×2 destacado têm a menor soma possível. Qual é a soma dos cinco números escritos fora deste quadrado?



- b) Em um novo quadriculado, a soma das quatro áreas 2×2 resulta em 92. Se a soma dos quatro números nos cantos do tabuleiro 3×3 é 14, qual é o número na casa central?
- c) Se Antônio colocar o número 5 na casa central e garantir que a soma dos quatro cantos seja 10, qual será a soma total combinada dos quatro quadrados 2×2 ?
- d) Antônio conseguiu preencher outro quadriculado de modo que a soma dos números escritos em um dos quadrados 2×2 destacados é 21 e, no outro, 26. As duas figuras abaixo são representações desse mesmo quadriculado. Qual é o menor número que Antônio pode ter escrito na casa central do quadriculado?



Gabarito:

Linha 1: 14, 20, 28
 Linha 2: 20, 26, 34
 Linha 3: 24, 30, 38

	9	15	0
6	15	21	6
16	25	31	16
13	22	28	26

- a) Em qualquer tabuleiro desse tipo, a soma dos 9 números é $3 \times (\text{soma das linhas} + \text{soma das colunas}) = 9 \times (\text{elemento central})$

Se a soma total é 180, o elemento central vale $180 / 9 = 20$.

Como a célula do meio dada é 21, ajustamos as relações entre os cantos: o número do quadradinho cinza será **15**.

2)

- a) O livro 19 está na 1ª linha. Avançar 2 colunas para a direita soma 2. Descer 2 linhas adiciona $2 \times 25 = 50$ ao valor.

No entanto, no esquema apresentado: o número 19 está na coluna 1 do pedaço, e X está 2 colunas à direita e 2 linhas abaixo. $X = 19 + 2 + 50$

$$X = 71$$

- b) Vamos expressar os valores em função do número da coluna k, em que A se encontra.

$$A = k \text{ (já que está na 1ª linha);}$$

$$B = 25 + (k + 1) = k + 26 \text{ (está na 2ª linha, coluna } k+1\text{);}$$

$$C = 75 + (k - 3) = k + 72 \text{ (está na 4ª linha, coluna } k-3\text{).}$$

Como d divide A, B e C, ele também deve dividir as diferenças entre eles:

$$1. (B - A) = (k + 26) - k = 26$$

$$2. (C - A) = (k + 72) - k = 72$$

O divisor d precisa dividir simultaneamente 26 e 72.

Divisores de 26: {1, 2, 13, 26}

Divisores de 72: {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}

O único valor possível para d é 2.

- c) Para que $d = 2$ divida A, B e C, todos esses números devem ser pares: $A = k$ é par.

Como $C = k + 72$ precisa existir na 4ª linha na coluna $k - 3$, precisamos que

$$k - 3 \geq 1 \Rightarrow k \geq 4.$$

Além disso, como $B = k + 26$ precisa estar na coluna $k + 1$, temos que

$$k + 1 \leq 25 \Rightarrow k \leq 24.$$

Portanto, A deve ser um número par entre 4 e 24:

$$A \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$$

3)

- a) Para que o resultado tenha 4 algarismos, precisamos que $A + B \geq 10$.

Testando os valores de $111 \times (A + B)$:

$$\text{Se } A + B = 15: \text{Soma} = 111 \times 15 = 1665.$$

$$\text{Soma dos dígitos de 1665: } 1+6+6+5=18.$$

Exemplo de resposta: $A=7$ e $B=8 \Rightarrow 787+878=1665$ (outras combinações nas quais

$A + B = 15$, como $969 + 696$, também são válidas).

- b) Para terminar em 7, a soma $A + B$ deve ser 7 ou 17.

Para $A + B = 7$:

Pares (A, B) : $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \rightarrow 6$ combinações possíveis

Para $A + B = 17$:

Pares (A, B) : $(8,9), (9,8) \rightarrow 2$ combinações possíveis

Total: $6 + 2 = 8$ somas possíveis.

- c) Para que a soma tenha 4 algarismos, o resultado de $A + B$ deve ser no mínimo 10.

Como o valor máximo para a soma de dois algarismos é $9 + 8 = 17$, temos que:

$$10 \leq A+B \leq 17$$

Multiplicando essa desigualdade por 111:

$$1110 \leq \text{Soma} \leq 1887$$

Como o resultado está estritamente entre 1110 e 1887, o algarismo do milhar é obrigatoriamente 1. Como o número 1 é um algarismo ímpar, é impossível que todos os algarismos da resposta sejam pares.

4)

- a) $M = 4$
- b) $I = 6$
- c) $S = 3$
- d) 10, 2, 5 e 7

5)

- a) 35.
- b) 8.
- c) 90.
- d) 5.

B.3 Princípio Multiplicativo

Introdução

O estudo da análise combinatória envolve diversas técnicas interessantes para a resolução de problemas de contagem e a organização de conjuntos. De fato, a primeira operação matemática aprendida por uma criança é o simples ato de contar objetos diversos.

Durante esse capítulo, veremos, de maneira introdutória, o Princípio Multiplicativo, que apresenta-se como a ferramenta básica que usamos para resolver problemas de contagem.

Princípio Multiplicativo

Em diversas situações, desejamos descobrir quantas escolhas, dentre muitas possibilidades, podem ser feitas. No entanto, para casos em que existem muitas opções, enumerar todas combinações possíveis torna-se trabalhoso sem um artifício que simplifique os cálculos. Em algumas situações, podemos, ainda, esquecer alguns casos e o problema se torna trabalhoso. Busquemos, então, diversas maneiras de simplificar problemas de contagem.

Considere a seguinte situação:

- Pedro Giordani possui 3 calças de alfaiataria e 2 camisas de botão. Ele deseja escolher uma combinação para ir à uma premiação. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher uma calça e uma camisa?

Resolução: Vamos chamar as camisas de C_1 e C_2 e as calças de A_1 , A_2 e A_3 .

As possibilidades são:

(C_1, A_1) (C_1, A_2) (C_1, A_3)

(C_2, A_1) (C_2, A_2) (C_2, A_3)

Portanto, Pedro pode formar 6 combinações diferentes.

Perceba, caro leitor, que Pedro Giordani não precisaria listar todas as possibilidades uma por uma. Para cada uma das 2 camisas de botão, ele pode usar qualquer uma das 3 calças de alfaiataria. Assim:

$$2 \times 3 = 6 \text{ maneiras}$$

Esse raciocínio é chamado de **Princípio Multiplicativo**. De modo geral, enunciaremos ele da seguinte maneira:

“Se pudermos tomar uma decisão A de x maneiras e, após tomada a decisão A, pudermos tomar a decisão B de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões A e B é xy.”

No caso acima, para organizar as camisas devemos tomar as decisões:

- Decisão A: escolha da camisa de botão;
- Decisão B: escolha da calça de alfaiataria:

Como a decisão A pode ser tomada de 2 maneiras e a decisão B, posteriormente, pode ser tomada de 3 maneiras, temos que o número total de maneiras de combinar as roupas é $2 \times 3 = 6$.

Se tivermos três ou mais escolhas sucessivas em um problema, podemos resolvê-lo de maneira parecida com o exemplo inicial. Por exemplo:

- O restaurante Time Venn em um certo dia da semana oferece 3 opções de pratos principais, 4 opções de bebidas e 2 opções de sobremesa. De quantas maneiras um cliente pode escolher um prato principal, uma bebida e uma sobremesa?

Resolução: O cliente pode organizar sua escolha em três etapas:

- Decisão 1: escolha do prato principal;
- Decisão 2: escolha da bebida;
- Decisão 3: escolha da sobremesa:

Como a decisão 1 pode ser tomada de 3 maneiras, a decisão 2 de 4 maneiras e a decisão 3 de 2 maneiras, o número de possibilidades de escolha desse cliente será de:

$$3 \times 4 \times 2 = 24 \text{ maneiras}$$

Aplicações do Princípio Multiplicativo

A seguir, será apresentada algumas estratégias para resolver certos tipos de exercícios.

P1. (Morgado) Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Para resolver esse problema, podemos analisar quais algarismos podem estar, respectivamente, na casa das centenas, na casa das dezenas e, por último, na casa das unidades.

O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 maneiras (perceba que não podemos escolher o número zero), o segundo de 9 maneiras (aqui, não podemos utilizar o algarismo usado anteriormente, mas o zero poderá ser escolhido) e o terceiro de 8 maneiras (não podemos usar os dois algarismos já empregados nas casas anteriores). Portanto, existem $9 \times 9 \times 8 = 648$ números naturais de três algarismos distintos

O mesmo resultado poderia ser alcançado se começarmos a contar a partir das unidades? Verifique!

P2. Quantas combinações diferentes de palavras podem ser formadas com o nome GOMIDE?

A palavra “gomide” possui 6 letras diferentes, sendo elas: G, O, M, I, D e E. Por isso, temos 6 opções para a primeira posição, 5 opções para a segunda opção (não podemos repetir a primeira letra já usada), 4 opções para a terceira opção, 3 opções para a quarta posição, 2 opções para a quinta opção e, por fim, apenas 1 opção para a sexta posição. No total, teremos $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ ordenações diferentes.

Mais precisamente, nesse caso, a multiplicação pode ser escrita da forma:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$6! = 720$$

Na expressão acima, a notação ! é chamada **fatorial** e as ordenações desse tipo são chamadas **anagramas** ou **permutações**, em que a ordem dos elementos é importante.

O fatorial de um número natural é o produto desse número por todos os naturais positivos menores que ele.

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

(Morgado) Quantos são os números naturais pares que se escrevem (na base 10) com três algarismos distintos?

Nesse exercício, perceba que o enunciador impôs uma regra que teremos que seguir na hora de preencher as posições dos algarismos: o último número terá de ser um número par.

Perceba que temos 5 opções para o último algarismo (0, 2, 4, 6 ou 8). No entanto, existem dois casos para a escolha do primeiro algarismo a depender do número posicionado no último algarismo.

- Se o número 0 for escolhido primeiro, teremos, então, 9 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos usar o primeiro número já empregado);
- Se o número 0 não for escolhido, teremos, então, 8 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos usar o algarismo já empregado na última casa nem o número zero).

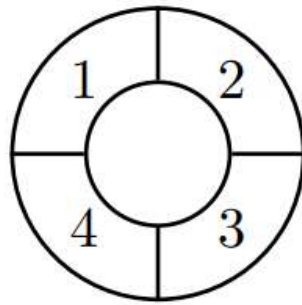
Assim, podemos separar esse problema em dois casos distintos e resolvê-los separadamente.

No primeiro caso, se terminarmos em zero temos 1 maneira de escolher o último número, 9 maneiras para escolher o primeiro número e 8 maneiras de escolher o segundo número. No total, serão $1 \times 9 \times 8 = 72$ números diferentes.

No segundo caso, teremos 4 modos de escolher o último algarismo, 8 modos de escolher o primeiro algarismo e 8 modos de escolher o segundo algarismo. Por isso, temos $4 \times 8 \times 8 = 256$ números distintos. Por fim, a quantidade total de números naturais pares com três algarismos distintos na base 10 é de $72 + 256 = 328$ maneiras.

Em certos problemas, dividir as situações em casos separados pode se tornar um caminho mais fácil para lidar com contagens que possuem regras.

(POTI) De quantos modos podemos pintar (usando uma de quatro cores) as casas da figura abaixo de modo que as casas vizinhas tenham cores diferentes?



Para resolver essa questão, vamos separar a pintura das casas da figura em dois casos distintos: a situação em que a casa 1 e 3 possuem as mesmas cores e a situação em que a casa 1 e 3 possuem cores diferentes.

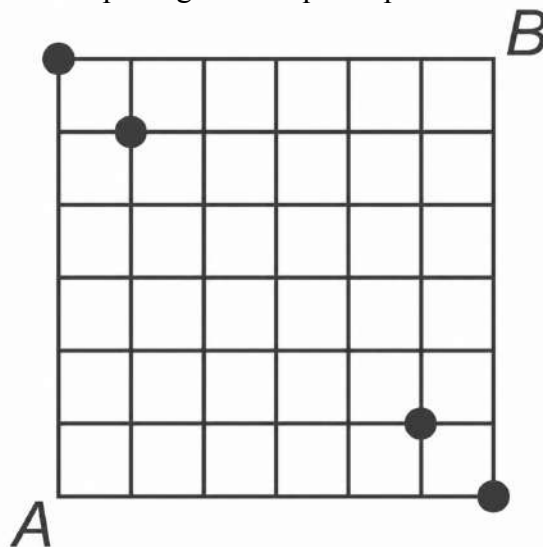
Na primeira situação, podemos escolher a cor que iremos pintar a casa 1 e a casa 3 de quatro maneiras (ambas possuem a mesma cor). Por outro lado, cada uma das casas 2 e 4 podem ser pintadas de três maneiras diferentes. Por isso, o total de modos será de $4 \times 3 \times 3 = 36$ de pintar nesse caso.

Agora, na segunda situação, podemos escolher a cor da casa 1 de quatro maneiras e, por possuírem cores diferentes nesse caso, a cor da casa 3 de três maneiras. As casas 2 e 4 poderão ser pintadas de duas maneiras cada, uma vez que não podem repetir a cor da casa 1 nem a cor da casa 3. Logo, o número total de possibilidades para pintar as casas será de $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$.

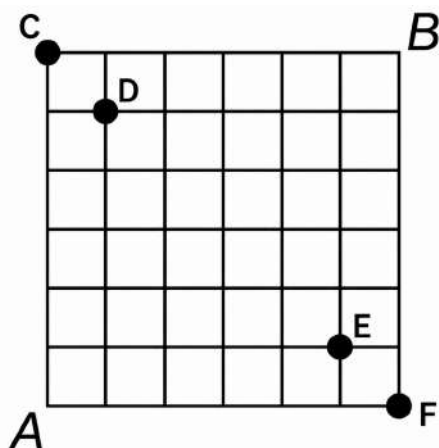
Portanto, existem $48 + 36 = 84$ maneiras de pintar a figura.

(OBMEP) Uma formiga, inicialmente no vértice A, anda sobre as linhas do quadriculado da figura, sempre para a direita ou para cima, até chegar ao vértice B. De quantas maneiras ela pode fazer isso passando por algum dos quatro pontos destacados?

- a) 4
- b) 32
- c) 36
- d) 64
- e) 74



A princípio, para facilitar a resolução, nomearemos os quatro pontos indicados no enunciado de C, D, E e F conforme o desenho abaixo.



Começando pelos pontos localizados nos extremos da figura, perceba que há apenas um caminho possível de A até B que passa pelo ponto C. O mesmo ocorre com o ponto F. Por isso, podemos contar dois caminhos.

Agora, para ir de A até E, temos 6 caminhos possíveis. Esses trajetos caracterizam-se pela escolha de qual coluna a formiga irá realizar seu movimento para cima. De E para B, também temos seis caminhos possíveis que, análogo ao percurso inicial, são determinados pela escolha de qual linha a formiga irá realizar seu movimento para direita. Desse modo, há $6 \times 6 = 36$ caminhos que saem de A até B passando por E. O mesmo

resultado também vale para o ponto D.

Sendo assim, a soma total dos trajetos possíveis que a formiga pode realizar é igual a $36 + 36 + 1 + 1 = 74$.

Exercícios propostos

(OBMEP 2º fase 2024 - Nível 1) Uma tabela 4×4 , preenchida com os números 0 e 1, é equilibrada quando, somando os números em cada linha, obtemos todos os inteiros de 1 a 4, o mesmo ocorrendo com as somas dos números de cada coluna. Por exemplo, a tabela ao lado é equilibrada.

1	1	1	1	→ 4
1	1	1	0	→ 3
0	1	1	0	→ 2
0	1	0	0	→ 1
↓	↓	↓	↓	
2	4	3	1	

a) Preencha as tabelas abaixo de modo que elas sejam equilibradas, com as linhas e colunas tendo as somas indicadas.

				→ 4
				→ 3
				→ 2
				→ 1

58

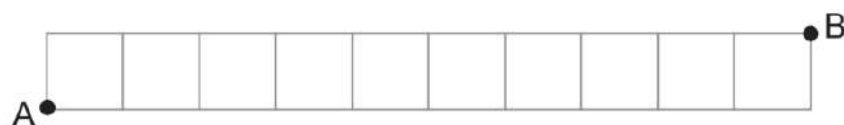
				→ 2
				→ 4
				→ 1
				→ 3

b) Quantas são as tabelas equilibradas com a soma de cada linha indicada abaixo?

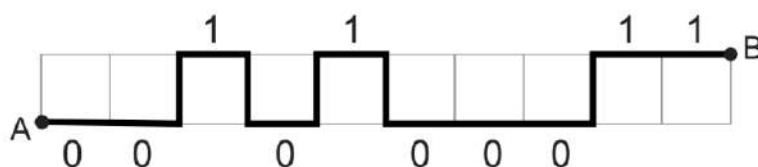
				→ 4
				→ 3
				→ 2
				→ 1
↓ ?	↓ ?	↓ ?	↓ ?	

c) Quantas são as tabelas equilibradas?

(OBMEP 2º fase 2023 - Nível 1) A formiguinha da OBMEP caminha do ponto A até o ponto B ao longo dos lados dos 10 quadradinhos da figura abaixo.



Ela só pode andar para a direita, para cima ou para baixo, sem passar por onde já passou. Para representar um caminho, ela inventou o seguinte código: para cada quadradinho, da esquerda para a direita, se ela passar por baixo, escreve 0 e se passar por cima, escreve 1. Na figura a seguir observamos o caminho representado por 0010100011.

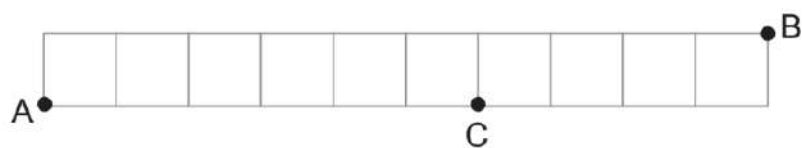


a) Desenhe o caminho representado por 1001001100.



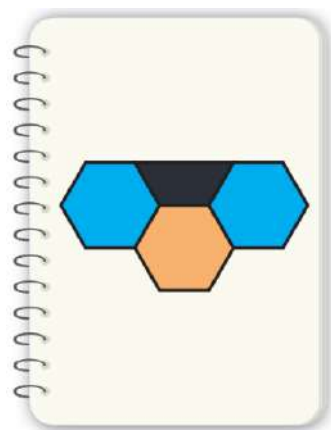
b) De quantas maneiras diferentes a formiguinha pode ir de A até B?

c) De quantas maneiras diferentes a formiguinha pode ir de A até B passando pelo ponto C?

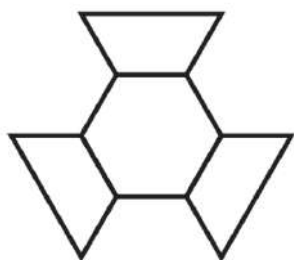


(OBMEP 2º fase 2021 - Nível 1) Maria pinta, em seu caderno, figuras formadas por trapézios e hexágonos. Cada hexágono pode ser pintado de azul, bege ou cinza, e cada trapézio, de azul ou preto. Polígonos com um lado em comum não podem ter a mesma cor. A figura ao lado é um exemplo de uma pintura feita por Maria.

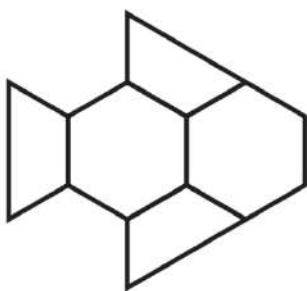
a) De quantas maneiras Maria pode pintar a figura abaixo?



b) De quantas maneiras Maria pode pintar a figura abaixo?



c) De quantas maneiras Maria pode pintar a figura abaixo?



(OBMEP 2º fase 2019 - Nível 1) Roberta tem duas cartelas, uma com os números de 1 a 15 e outra com os números de 16 a 30. Ela escolhe um número de cada cartela e calcula a soma deles.

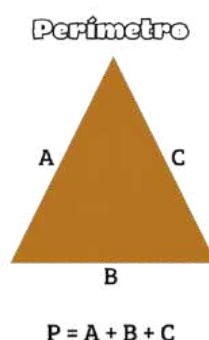
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

- a) Quais são as escolhas possíveis para Roberta obter a soma 18?
- b) Se Roberta fizer todas as escolhas possíveis, quantos resultados diferentes ela poderá obter?
- c) Se Roberta fizer todas as escolhas possíveis, qual é o resultado que aparecerá mais vezes? Por quê?

C. Geometria

C.1 Área e Perímetro



Perímetro é a medida do contorno de uma figura geométrica, sendo calculado pela soma de todos os lados de uma figura geométrica plana. Em termos práticos, ele é utilizado, por exemplo, para calcular o comprimento de cercas que envolvem um terreno.



$$P_{\text{triângulo}} = A + B + C$$

- Em que A, B e C são os lados do triângulo



$$P_{\text{quadrado}} = 4L$$

- Em que L é o lado do quadrado.



$$P_{\text{retângulo}} = 2c + 2l$$

- Em que c é o comprimento e l é a largura do retângulo.



$$P_{\text{trapézio}} = B + b + L_1 + L_2$$

- Em que B é a base maior, b é a base menor, L_1 e L_2 são os lados do trapézio.



$$P_{\text{losango}} = 4L$$

- Em que L são os lados do losango.



$$P_{\text{círculo}} = 2\pi r$$

- Em que π é uma constante (aproximadamente 3,14) e r é o raio da circunferência.

A **área** equivale à medida da superfície de uma figura geométrica. É como se pintássemos o interior de uma figura: a parte colorida seria a área. é dada em cm^2 , m^2 , km^2 , etc.

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{bh}{2}$$

- Em que b é a base e h é a altura do triângulo

Obs.: no triângulo equilátero, em que todos os lados e ângulos são iguais, a altura pode ser dada como:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}, \text{ em que } l \text{ é o lado do triângulo.}$$

$$A_{\text{quadrado}} = L^2$$

- Em que L é o lado do quadrado

$$A_{\text{retângulo}} = bh$$

- Em que b é a base e h é a altura do retângulo.

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B+b)h}{2}$$

- Em que B é a base maior, b é a base menor e h é a altura do trapézio.

$$A_{\text{losango}} = \frac{Dd}{2}$$

- Em que D é a diagonal maior, d é a diagonal menor e h é a altura do losango

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$$

- Em que π é uma constante e r é o raio do círculo.

Exercícios de fixação:

a) Qual o perímetro e a área de um quadrado de lado 15 cm?	b) Uma praça circular de 30m de diâmetro é totalmente contornada por cercas. Qual deve ser o comprimento dessas cercas? $\pi = 3,14$	c) Antônia possui uma folha quadrangular de lado 20cm. Ela dobra essa folha ao meio, obtendo um retângulo. Qual é a área desse retângulo?
d) Miguel possui um prato de 1256cm^2 de área. Ele deseja saber qual o raio desse prato. Considerando $\pi = 3,14$, ajude Miguel a descobrir o raio.	e) Um triângulo equilátero tem lado igual a 5cm. Calcule o perímetro e a área desse triângulo.	f) Um triângulo equilátero possui $25\sqrt{3}\text{cm}^2$ de área. Unindo os dois triângulos, um ao lado do outro, obtemos um losango. Qual o perímetro e a área desse losango?
g) Pedro desenha em seu caderno um círculo de raio 10cm. Logo após, ele traça uma linha no diâmetro do círculo, dividindo-o ao meio. Qual a área de cada pedaço do círculo que Pedro dividiu? $\pi = 3,14$	h) Um trapézio regular possui as seguintes medidas: $B=3b=2h$. Sabendo que sua área é 300cm^2 calcule o perímetro do trapézio.	i) Um quadro possui 20cm de largura e 5 cm de comprimento. A imagem que ele contém é um quadrado de área cinco vezes menor que a área total do quadro. Qual a medida dos lados desse quadrado?
j) Uma pizza é dividida igualmente entre Aline, Miguel e Júlia. Cada um deles comeu dois pedaços e nenhum pedaço sobrou ao final. Se a pizza possuía raio de 10cm, qual a área de cada pedaço? $\pi = 3,14$	k) Decorando sua casa para uma festa junina, Antônia cola um dos lados de um quadrado com a base de um triângulo isósceles, para formar uma bandeirola. Se a base desse triângulo mede 10cm e sua altura 4 cm, qual a área total da bandeirola?	l) Um triângulo equilátero é dividido ao meio, formando dois triângulos. Considerando que a reta que o dividiu meça $10\sqrt{3}\text{ cm}$, qual o perímetro de cada triângulo formado?

m) A Grande Pirâmide do Egito possui 208m de altura da face e 230m de largura na base. Calcule a área de uma de suas faces.	n) Um terreno é cercado com cinco fios de arame. Se esse terreno é um retângulo de $l=c^2$ e $l=25m$, calcule a quantidade de arame necessária.	o) A tela de um computador possui 60 cm de comprimento e 20 cm de altura. Sua moldura, que a cerca, tem 70 cm de comprimento e 45 cm de altura. Qual a área de apenas a moldura do computador?
p) Qual o perímetro e a área de um círculo de raio $10\sqrt{2}$? $\pi = 3$	q) Em um pote quadrado de área igual a 900 cm^2 , quantas latas de refrigerante, de raio 4 cm, conseguem ser acomodadas?	r) Um triângulo isósceles possui dois lados medindo 25 cm. Se a área desse triângulo é 300 cm^2 e sua altura mede 15 cm, calcule o perímetro da figura.

Gabarito:

- | | | |
|------------------------------------|--|---|
| a) 60 cm e 225 cm^2 | g) 157 cm^2 | m) 95 680 cm^2 |
| b) 94,2m | h) $40 + 10\sqrt{13}\text{ cm}$ | n) 625 cm |
| c) 200 cm^2 | i) $2\sqrt{5}\text{ cm}$ | o) 1950 cm^2 |
| d) 20 cm | j) Aproximadamente $52,33\text{ cm}^2$ | p) $60\sqrt{2}\text{ cm}$ e 600 cm^2 |
| e) 15 cm e $6,25\text{ cm}^2$ | k) 120 cm^2 | q) 9 latas |
| f) 40cm e $50\sqrt{3}\text{ cm}^2$ | l) $30 + 10\sqrt{3}\text{ cm}$ | r) 90 cm |

Resolução guiada (use de inspiração para resolver as questões de A a R):

a)

1. Calculando o Perímetro

Como um quadrado possui 4 lados de comprimentos iguais, a fórmula para o perímetro é $4L$.

Substituindo o valor do lado dado no enunciado (15 cm): 4×15

Resultado do Perímetro: 60 cm

2. Calculando a Área

Para um quadrado, a área é calculada multiplicando a base pela altura (ou simplesmente elevando o lado ao quadrado). A fórmula é:

$L \times L$

Substituindo o valor do lado (15 cm): 15×15
Resultado da Área: 225 cm^2

b)

1. Identificando os Dados

Diâmetro: 30 metros

Valor de Pi: 3,14.

2. Fórmula do Comprimento da Circunferência: πr^2

Como o raio é a metade do diâmetro, $r = 15\text{m}$,

3. Substituindo os Valores e Calculando

$3,14 \times 15 \times 15 = 94,2\text{m}$

c)

1. Analisando a Folha Original

Antônia tem uma folha quadrada com lados de 20 cm.

Largura original: 20 cm

Altura original: 20 cm.

2. O Efeito da Dobra

Quando ela dobra a folha exatamente ao meio, um dos lados é dividido por 2, enquanto o outro permanece igual. Dessa forma, o novo retângulo terá as seguintes medidas:

Comprimento: 20 cm

Largura: 10cm.

3. Calculando a Área do Retângulo

A fórmula para calcular a área de um retângulo é $B \times H$. Substituindo os novos valores:

$20 \times 10 = 200\text{cm}^2$

d)

1. Escrever a fórmula

A área de um círculo é dada por: πr^2

Em que:

- $A = 1256 \text{ cm}^2$
- $\pi = 3,14$
- $r = ?$

2. Substituir os valores

$$1256 = 3,14 \times r^2$$

3. Isolar r^2

Divida os dois lados por 3,14:

$$r^2 = \frac{1256}{3,14} = 400$$

4. Tirar a raiz quadrada

$$r = \sqrt{400}$$

Logo, o raio do prato é 20 cm.

Exercícios estilo olímpicos

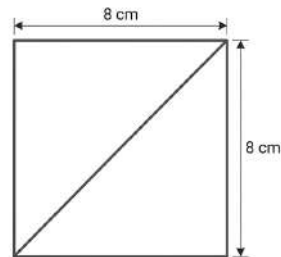
1) Analise a imagem e responda:



a) Calcule a área da região branca.

b) Calcule o perímetro da região branca.

- 2) Um quadrado foi dividido por uma diagonal.



Qual é a área de cada triângulo formado?

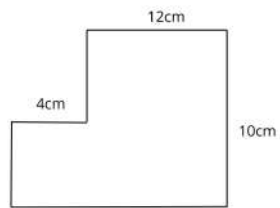
- 3) Um retângulo tem perímetro igual a 40 cm.

Se aumentarmos o comprimento em 2 cm e diminuirmos a largura em 2 cm, sua área aumenta em 8 cm^2 .

- a) Quais são as dimensões do retângulo?

- b) Qual é sua área?

- 4) A figura acima é formada por um retângulo de $16 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$, do qual foi retirado um quadrado de $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ no canto superior esquerdo.



a) Calcule a área da figura.

b) Calcule o perímetro da figura.

Gabarito:

1) a- $128cm^2$

b- 64cm.

2) $32cm^2$

3) a- 7cm e 13 cm.

b- $91cm^2$

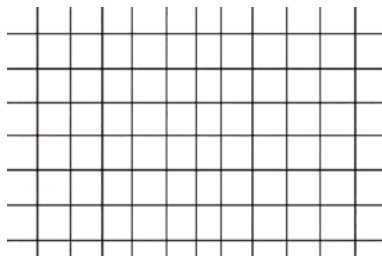
4) a- $144cm^2$

b- 52cm.

C.2 Geometria no quadriculado

A geometria em quadriculados explora figuras desenhadas sobre uma malha regular, permitindo calcular áreas e perímetros por contagem de unidades básicas. Pode ser formada de quadrados, de triângulos, de hexágonos, etc.

Quadriculado:

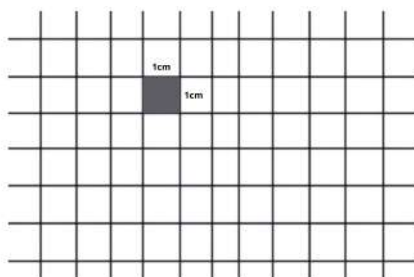


Os exercícios apresentam o valor de cada quadradinho da malha. Nesse sentido, considere que a malha é formada por quadrados de lado 1cm:

- Cada quadrado possui área igual a 1cm^2 .
- O perímetro desse quadrado é 4cm.

A área das figuras correspondem ao número total de quadradinhos ocupados:

- **Casos simples**



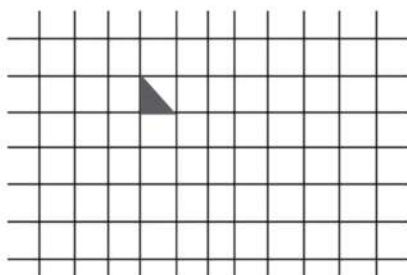
$$A = L_{\text{malha}} \times L_{\text{malha}} \times \text{quantidade de quadradinhos}$$

Se a figura ocupa 15 quadradinhos inteiros, com malha de 1cm, então:

$$A = 1 \times 1 \times 15 = 15\text{cm}^2$$

- **Casos com meios quadrados**

Frequentemente aparecem diagonais dividindo quadrados em dois triângulos congruentes.



Nesse caso:

$$A = \frac{L_{\text{quadrado}} \times L_{\text{quadrado}} \times \text{quantidade de quadrados}}{2}$$

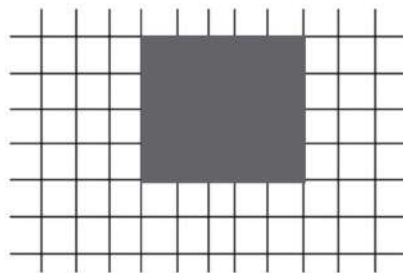
Se a figura ocupa 15 meios quadrados, com malha de 1cm, então:

$$A = 1 \times 1 \times 15 \times 2 = 7,5 \text{ cm}^2$$

O perímetro é o comprimento do contorno da figura.

- **Casos simples**

Percorra toda a borda e conte o segmento de lado unitário.



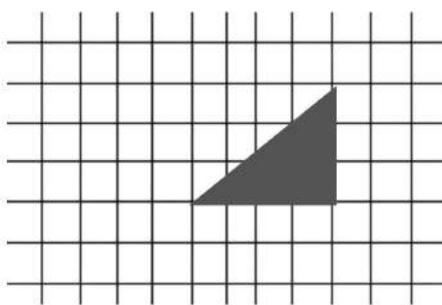
Se uma figura possui lado de 5 segmentos horizontais e de 4 segmentos verticais.

Então:

$$P = (5 \times 2) + (4 \times 2) = 18$$

- **Casos com meios quadrados**

Realize o Teorema de Pitágoras para descobrir o lado não inteiro:



Essa figura possui lado de **3 segmentos verticais** e **4 segmentos horizontais**. Sendo assim:

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$

$$4^2 + 3^2 = \sqrt{25}$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$4 + 3 + 5 = 12$$

Exercícios estilo olímpicos:

- 1) O tabuleiro abaixo é formado por 7 hexágonos regulares de lado 1 cm.



Podemos pintar alguns hexágonos para formar diferentes figuras.

- a) Pinte exatamente 3 hexágonos formando uma figura com perímetro igual a 14 cm.
 - b) Pinte exatamente 3 hexágonos formando uma figura com o menor perímetro possível.
 - c) Explique por que, ao aproximar dois hexágonos que compartilham um lado, o perímetro diminui exatamente 2 cm.
- 2) Antônia possui peças em forma de triângulo equilátero de área 1 cm² e peças em forma de trapézio, formadas pela união de 3 triângulos equiláteros.
- Ela quer montar uma figura com área total de 18 cm² usando o menor número possível de peças.

Sabendo que ela pode usar quantos triângulos e trapézios quiser, responda:

a) Quantos trapézios ela deve usar para que o número total de peças seja mínimo?

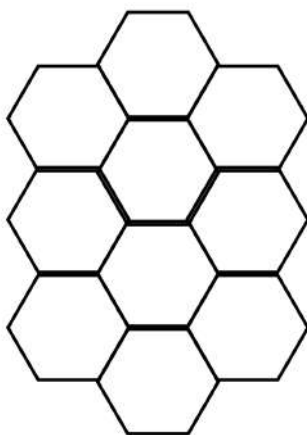
Desenhe-os na malha triangular pontilhada a seguir.



b) Quantos triângulos serão necessários? Desenhe-os na malha triangular pontilhada a seguir.

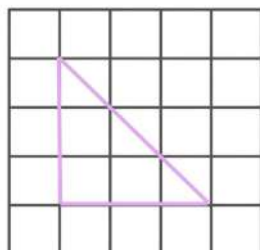


3) Considere o tabuleiro abaixo, formado por 10 hexágonos regulares de lado 1 cm.



a) Pinte 4 hexágonos formando uma figura com perímetro igual a 18 cm.

b) Mostre que toda figura formada por hexágonos pintados possui perímetro par.



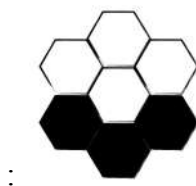
4) A reta marcada forma um triângulo.

a) Determine a área do triângulo em unidades de área (quadrados).

b) Qual a porcentagem do quadriculado correspondente à área da figura?

Gabarito:

1) a- Exemplo de uma possibilidade:

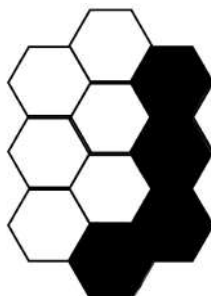


b- O perímetro formará 12cm. Exemplo de uma possibilidade:



c- O lado comum deixa de fazer parte do contorno. Logo, perdem-se dois lados de comprimento 1, perdendo 2cm.

- 2) a- 6 trapézios
b- 18 triângulos
- 3) a- Exemplo de uma possibilidade:



b- Seja N o número de hexágonos pintados e A o número de lados compartilhados entre pares de hexágonos adjacentes.

Cada hexágono contribui inicialmente com 6 lados para o perímetro. Assim, antes de considerar as adjacências, teríamos $6n$ lados.

Agora, sempre que dois hexágonos compartilham um lado, esse lado não aparece no contorno externo da figura. Como ele foi contado duas vezes (uma para cada hexágono), devemos subtrair 2 do total.

Se existem A lados compartilhados, o perímetro é $P=6n-2a$

Colocando 2 em evidência, $P=2(3n-a)$

Como $3n-a$ é um número inteiro, P é múltiplo de 2.

Logo, o perímetro de qualquer figura formada por hexágonos pintados é sempre um número **par**.

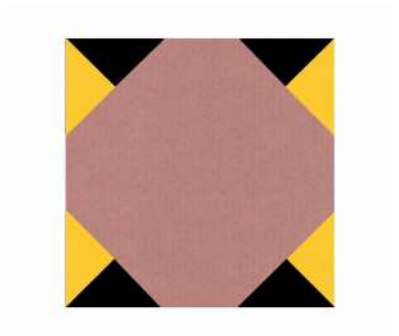
- 4) a- $4,5\text{cm}^2$

b- 18% do total.

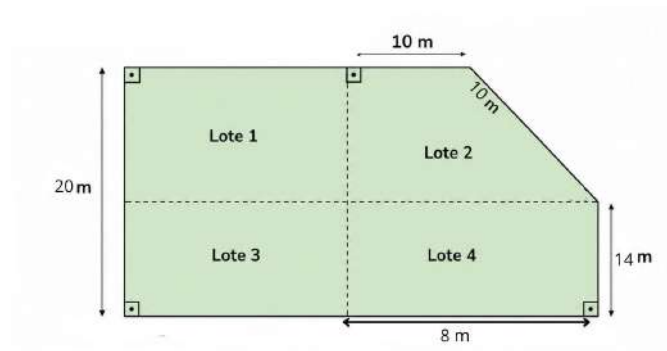
C.3 Dividir para conquistar

A ideia de "dividir para conquistar" em problemas de área é transformar uma figura complicada em partes simples e iguais (normalmente triângulos, quadrados ou retângulos). Assim, em vez de calcular medidas difíceis, você trabalha com frações da área total.

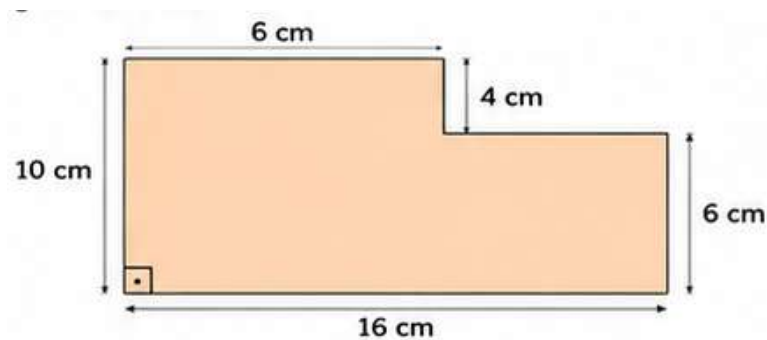
- 1) Um quadrado vermelho tem lado 4 cm. Sobre cada lado do quadrado é construído um triângulo isósceles retângulo, com $\frac{1}{4}$ da medida do lado. Cada triângulo é dividido ao meio pela altura relativa à hipotenusa. A região amarela é formada por uma das metades de cada triângulo. Qual é a área total amarela?



- 2) A figura abaixo representa um terreno com formato de um polígono. Ele será dividido em quatro lotes, todos com a mesma área, traçando-se segmentos de reta conforme indicado na figura. Qual a área de cada lote?



- 3) A figura abaixo representa um polígono. Ele será dividido em duas partes de mesma área usando apenas um segmento de reta. Trace esse segmento e indique a área de cada parte.



4) Considere um quadrado de lado **30 cm**.

Ligando os pontos médios dos lados forma-se outro quadrado.

Ligando os pontos médios desse novo quadrado forma-se outro, e assim sucessivamente.

Determine:

a) a área do segundo quadrado;

b) a área do terceiro;

Gabarito:

1) Se o lado do quadrado vermelho mede 4 cm, cada lado do triângulo isósceles mede 1 cm.

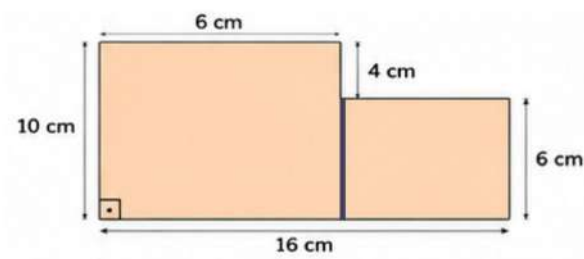
1. A hipotenusa do triângulo mede $\sqrt{2}$

O triângulo amarelo tem ambos os catetos medindo $\frac{\sqrt{2}}{2}$, e hipotenusa medindo 1.

Logo, sua área é $\frac{1}{4}$. Como são 4 triângulos, então a área total da área amarela é de 1 cm quadrado.

2) 84 cm^2

3) 60 cm^2



4)

a- 450 cm^2

b- 225 cm^2

c- As áreas formam a sequência

900, 450, 225, 112,5...

Cada termo é metade do anterior.

Logo, trata-se de uma progressão geométrica (PG) de razão $\frac{1}{2}$

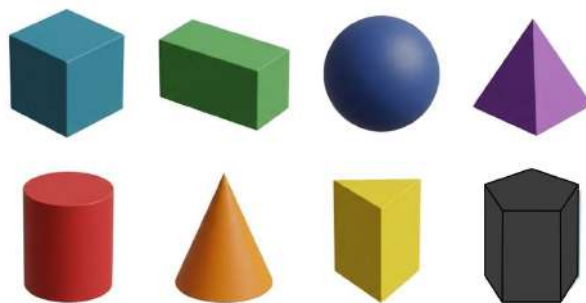
Então,

$$A_n = 900 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

é a área do n-ésimo quadrado.

C.4 Geometria Espacial

Geometria espacial é a parte da matemática que estuda os sólidos geométricos, ou seja, figuras que possuem três dimensões (comprimento, largura e altura). Exemplos dessas figuras são os cubos, paralelepípedos, cilindros, cones, esferas, pirâmides, prismas, entre outros.



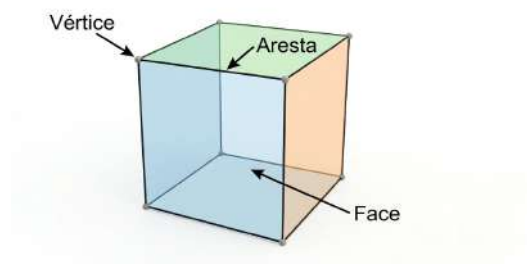
Neste módulo, o foco será o **cubo**. Ele é um sólido formado por seis faces quadradas iguais. Todo cubo possui:

- 6 faces
- 12 arestas
- 8 vértices

Face: é cada lado plano do cubo.

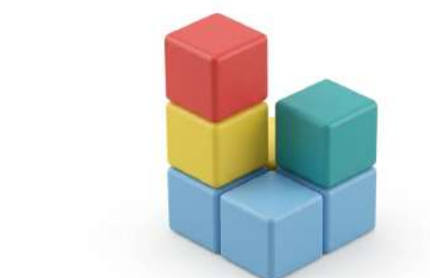
Aresta: é o encontro de duas faces.

Vértice: é o ponto onde três arestas se encontram.



Nem sempre as figuras são formadas por apenas um cubo. Muitas delas apresentam vários cubos unidos, formando uma única construção, chamadas de **sistemas de cubos**.

Exemplo:



Nesses casos, observe cuidadosamente a figura. Se houver cubos escondidos atrás de outros, eles também fazem parte da construção. Nunca conte apenas os cubos visíveis!

Em sistemas de cubos, dois cubos podem ficar encostados.



Quando isso acontece:

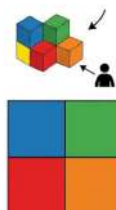
- as faces que ficam encostadas deixam de aparecer;
- apenas as faces externas continuam visíveis.

Por isso, nem toda face recebe pintura em muitas questões: as faces internas são retiradas da contagem de faces com tinta.

Uma mesma construção pode ser observada de diferentes posições. As principais vistas são:

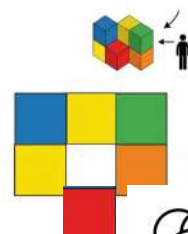
Vista frontal

É aquilo que enxergamos olhando a construção de frente.



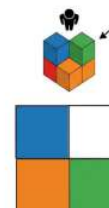
Vista lateral

É o que aparece quando olhamos de um dos lados.



Pode ser da direita ou da esquerda.

(Considere que a imagem dada possui 6 cubos em sua formação).



Vista superior

É a visão de cima.

Cada cubo possui seis faces. Entretanto, algumas podem ficar:

- encostadas em outro cubo;
- apoiadas sobre uma mesa ou outro objeto.

Essas faces não aparecem em nenhuma vista e são chamadas de **ocultas**. As demais são chamadas de **faces visíveis**.

Questões estilo olímpicas:

- 1) Um cubo grande foi construído juntando 27 cubinhos iguais. Depois, todas as faces externas foram pintadas de azul. Determine:
 - a) Quantos cubinhos receberam tinta em exatamente uma face?

b) Quantos receberam tinta em exatamente duas faces?

c) Quantos receberam tinta em exatamente três faces?

d) Quantos não receberam tinta?

Explique como você chegou a cada resposta.

2) Uma construção é formada por vários cubos. Quando observada:

- pela frente aparecem 4 cubos;
- pelo lado aparecem 3 cubos;
- por cima aparecem 5 cubos.

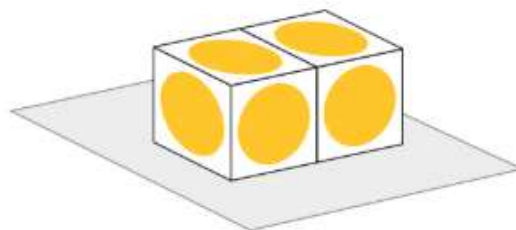
Qual é o menor número possível de cubos dessa construção? Justifique sua resposta desenhando ou descrevendo uma possível montagem.

3) Uma construção é formada por 8 cubos iguais. Ela está apoiada sobre uma mesa.

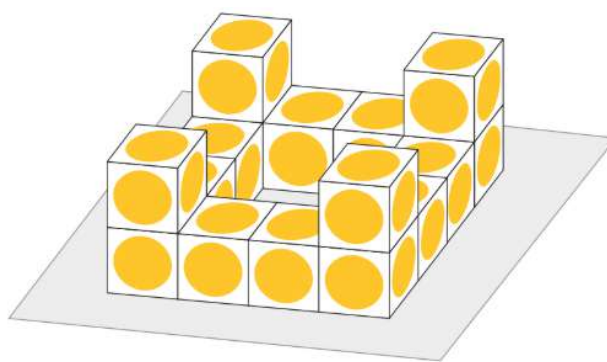
Sabendo que existem exatamente **30 faces visíveis**, determine quantas faces estão escondidas. Explique todos os cálculos realizados.

4) Antônio tem vários dados idênticos com faces numeradas apenas com números pares: 2, 4, 6, 8, 10 e 12. Nesses dados, a soma dos números em faces opostas é sempre igual a 14. Ela cola alguns desses dados e coloca adesivos coloridos nas faces não coladas, inclusive nas faces que estão em contato com a mesa.

a) Qual é a maior soma possível para todos os números que foram cobertos por adesivos nos dois dados colados?



b) Antônio colou vários dados formando uma estrutura maior, conforme mostrado na figura. Sabendo que ele precisa comprar os adesivos e cada um custa R\$ 0,50, qual será o valor total gasto para cobrir todas as faces expostas (lembrando de incluir as que tocam a mesa)?



Gabarito:

1)

- a- 6 cubinhos.
- b- 12 cubinhos.
- c- 8 cubinhos.
- d- 1 cubinho.

2) 6 cubinhos.



3) Existem exatamente 18 faces escondidas na construção de 8 cubos.

Passo 1: Calcular o total de faces

- Cubos utilizados: 8 unidades.
- Faces por cubo: 6 faces.
- Faces totais: $8 \times 6 = 48$ faces

Passo 2: Determinar as faces escondidas

- Faces visíveis: 30 faces.
- Faces totais: 48 faces.
- Faces escondidas: $48 - 30 = 18$ faces.

4)

a- 72.

b- 14 reais.

D. Combinatória

D.1 Princípio Multiplicativo - Revisão

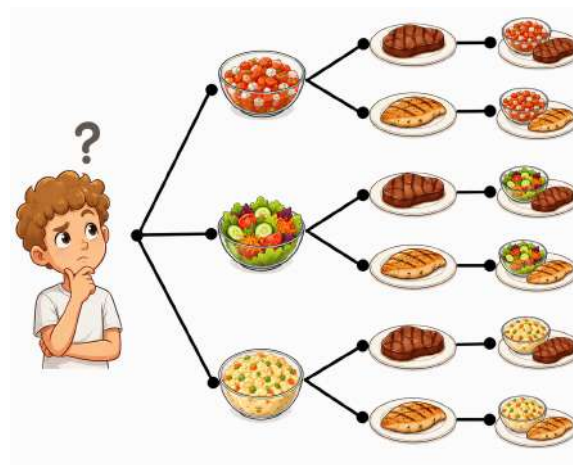
Na seção B.3, você deve ter aprendido sobre o Princípio Multiplicativo, que diz que a quantidade total de formas nas quais um evento pode ocorrer, dado a quantidade de opções disponíveis em cada etapa da formação do evento, é o produto dessas quantidades de opções.

Recapitule a lógica do Princípio Fundamental da Contagem nos seguintes exemplos:

1) Miguel vai almoçar com seus amigos no restaurante M.G., onde ele pode montar seu prato escolhendo uma dentre três opções de salada: vinagrete, salpicão e salada mista; e uma dentre duas opções de carne: bife de boi e filé de frango. De quantas maneiras diferentes Miguel pode montar sua refeição?

Resolução:

Para montar sua refeição, Miguel precisa fazer duas escolhas **completamente independentes**: uma escolha de salada e uma escolha de carne. Assim sendo, para cada uma das três saladas escolhidas, pode-se escolher **qualquer uma** das outras duas carnes. Assim, basta multiplicar o número de opções diferentes disponíveis em cada escolha para obter o número total de pratos distintos possíveis, como é demonstrado no **diagrama de árvore** abaixo. Assim, Miguel pode montar sua refeição de $3 \cdot 2 = 6$ maneiras diferentes.



2) Sophia vai sair para uma festa e para isso deve escolher qual roupa ela vai vestir. Sabendo que a menina têm 5 opções de sapatos, 3 opções de calças e 6 opções de blusas, determine de quantas maneiras ela pode se vestir.



Resolução:

A chave para resolver esse problema clássico do Princípio Multiplicativo é perceber que Sophia tem três escolhas completamente independentes a fazer: uma escolha de sapato, uma escolha de calça e uma escolha de blusa. Dizer que as escolhas são independentes significa dizer que tendo escolhido um dos 5 sapatos, ela pode escolher qualquer uma das 3 calças, e, depois, qualquer uma das 6 blusas, sem que uma escolha interfira na outra.

Sendo assim, basta multiplicar as opções independentes para obter o total de formas que Sophia pode se vestir: $5 \cdot 3 \cdot 6 = 90$ formas.

3) Pedro Augusto monta sua rotina durante um dia de férias seguindo a seguinte regra: ele estuda Física ou Matemática pela manhã, joga Mario Kart, Lego Batman ou Mortal Kombat durante a tarde, e assiste Vingadores, Star Wars, Rei Leão, Senhor dos Anéis ou Matrix pela noite. Sabendo disso, de quantas formas diferentes Pedro consegue organizar a sua rotina nesse dia?

Resolução:

Assim como os últimos dois problemas, esse consiste em escolhas independentes, a matéria escolhida para o estudo de manhã não afeta o videogame que será jogado pela tarde, o que, por sua vez, não influi no filme assistido à noite. Desse modo, fazendo a contagem das opções listadas no enunciado, nota-se que P.A. possui:

- 2 opções de matérias;

- 3 opções de jogos; e
- 5 opções de filmes.

Dessa forma, basta multiplicar a quantidade de opções disponíveis em cada etapa para obter o total de rotinas distintas, chegando a $2 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{30 \text{ configurações}}$.

4) Daniel precisa criar uma nova senha para o aplicativo que está desenvolvendo. Daniel sabe que a senha deve seguir o seguinte modelo:

- A senha deve conter 5 caracteres;
- Os três primeiros caracteres devem ser algarismos de 0 a 9; e
- Os dois próximos caracteres devem ser letras maiúsculas.

Assim, 098BG, 371ZJ, 222KL e 160GG são todas senhas válidas, porém 1209H, 459HBA e 74VCS são todas senhas inválidas. Desse modo, quantas senhas distintas Daniel pode formar?

Resolução:

É possível interpretar a senha de 5 algarismos como uma sequência de 5 espaços vazios que devem ser preenchidos, um por um, seguindo as regras dadas.

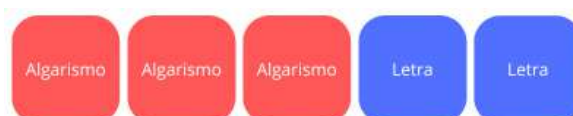
Para o primeiro espaço, pode-se escolher um dentre dez algarismos (0-9), o mesmo para o segundo espaço e para o terceiro espaço. Logo, os três primeiros espaços, ocupados por algarismos, podem ser preenchidos de $10 \cdot 10 \cdot 10 = \mathbf{1000 \text{ maneiras}}$.

Já para o quarto algarismo, pode-se escolher uma dentre as 26 letras do alfabeto, o mesmo para o quinto e último espaço. Assim, os dois últimos espaços, ocupados por letras, podem ser preenchidos de $26 \cdot 26 = \mathbf{676 \text{ maneiras}}$.

Com essas informações, muitos alunos se confundem na última etapa da resolução: afinal de contas, deve-se **somar** ou **multiplicar** os dois números obtidos?

Basta pensar que a senha é formada por uma das 1000 configurações para os três algarismos e uma das 676 configurações para as duas letras. Como a escolha de qual configuração de algarismos e letras formará a senha é independente, cabe o uso do Princípio Multiplicativo novamente.

Logo, Daniel pode formar $1000 \cdot 676 = \mathbf{676.000 \text{ senhas distintas}}$.



5) Quantos números pares de 3 algarismos podem ser formados?

Resolução:

Para formar uma sequência de 3 algarismos, sem restrições, pode-se escolher um dentre 10 algarismos para o primeiro espaço, um dentre 10 algarismos para o segundo espaço e um dentre 10 algarismos para o terceiro espaço. No entanto, o problema apresentado possui duas condições especiais que fazem com que uma aplicação direta do Princípio Fundamental da Contagem não baste:

i) O número deve ser par. Assim, o algarismo das unidades só pode ser ocupado pelos números 0, 2, 4, 6 ou 8, já que algarismo das unidades par é condição única e suficiente para formar um número par.

ii) O algarismo das centenas não pode ser zero. Isso por o zero na casa das centenas formaria um número do tipo 012, 034, 089, ou afim, não podendo ser considerado um número de 3 algarismos.

Assim, fazendo-se a sequência de escolhas:

- O algarismo das centenas pode ser preenchido por 9 algarismos (1-9)
- O algarismo das dezenas pode ser preenchido por 10 algarismos (0-9)
- O algarismo das unidades pode ser preenchido por 5 algarismos (0, 2, 4, 6 ou 8)

Logo, existem $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ números assim.