



APOSTILA PREPARATÓRIA PARA A

OBMEP

ORGANIZAÇÃO TIME VENN

NÍVEL **3** FASE **2**



Conselhos Venn para conquistar uma medalha na OBMEP!!

1 > Otimize seu tempo

Seja íntimo das apostilas da 1º e da 2º fase. Aproveite cada intervalo de tempo livre: exercite no intervalo de uma consulta, depois de terminar um exercício na sala de aula... Aproveite todas as brechas para exercitar; de pouco em pouco você verá o quanto valeu a pena.

2 > Observe seus pontos fracos

Perceba quais tipos de questões ou quais assuntos te levam mais recorrentemente ao erro e busque exercitá-los (sanando dúvidas e revisando o conteúdo). Estamos sempre aqui para ajudar e lembre-se: o erro é sempre a melhor forma de evoluir.

3 > Cuide da sua explicação

Para a segunda fase, é fundamental que você saiba explicar qual o raciocínio utilizou ao resolver o exercício, portanto aprenda a traduzir seus pensamentos com clareza, e, acima de tudo, organização. Quando for escrever, imagine que alguém que não sabe como resolver a questão precise entendê-la a partir de sua descrição e, dessa forma, você vai perceber que uma linguagem simples é muito melhor. Sempre confira suas respostas com o gabarito oficial ou peça que algum monitor ou professor corrija. Sintam-se à vontade para enviar qualquer dúvida no nosso instagram [**@timevenn**](#), vai ser um prazer ajudá-los.

4 > Simule seu tempo

De tempo em tempo, separe um dia para simular as condições da prova. Separe um caderno desta apostila, um lugar que possa se concentrar e tente resolver as questões no tempo que terá de fato no dia oficial. Esse passo é muito importante para que se acostume a solucionar as questões mais rapidamente.

5 > DESISTIR JAMAIS!

Mais importante do que uma medalha é o conhecimento e o crescimento pessoal adquiridos ao longo dos estudos, essa é a verdadeira conquista. Torne o processo prazeroso, divertido e desafiador. Confiamos em vocês e boa sorte em suas jornadas olímpicas!!

Esta apostila declara agradecimentos especiais aos seus contribuintes que, com esforço e dedicação buscam compartilhar o conhecimento:

Produção:

- André Aredes Brum Ribeiro - Diretor Acadêmico
- Gabriel Marques Martins Gomide - Assessor Acadêmico
- Aline Fioravante Zuliani
- Antônia Rocha Maciel
- Melissa Neves Lima do Nascimento
- Miguel Ramos Toledo
- Pedro das Chagas Benevenuto
- Matheus Carvalho Albeny Moraes

Contribuição Financeira:

- Sophia Nahas
- Bernardo Quintão
- Emmanuel Maurício
- André Aredes
- Daniel Augusto
- Gabriel Gomide
- Matheus Diniz
- Maria Antônia Caux
- Júlia Soares
- Matheus Albeny
- Pedro Lagares
- Sofia Lagares
- Arthur Ferreira

SUMÁRIO

A. Lógica

A.1 Percepção de padrões	2
A.2 Jogos de Verdade e Mentira	5
A.3 Paridade e Multiplicidade	10
A.4 Números especiais	18
A.5 Jogos lógicos	29

B. Álgebra

B.1 Exponenciação e Radiciação	46
B.2 Produtos Notáveis	51
B.3 Sistemas de Equação	55
B.4 Exercícios complementares	66

C. Geometria

C.1 Dividir para conquistar	69
C.2 Geometria Espacial	71
C.3 Ângulos	77
C.4 Triângulos	85
C.5 Congruência e semelhança de triângulos	93

D. Combinatória

D.1 Princípio Multiplicativo - Revisão	99
D.2 Operadores lógicos (E vs. OU)	102
D.3 Princípio da Inclusão-Exclusão - Lidando com interseções	109
D.4 Contagem por casos	115
D.5 Escolher x Ordenar: quando a ordem importa?	123
D.6 Fila x Roda: Análise Combinatória Circular	132
D.7 Probabilidade	136
D.8 Princípio da Casa dos Pombos	146

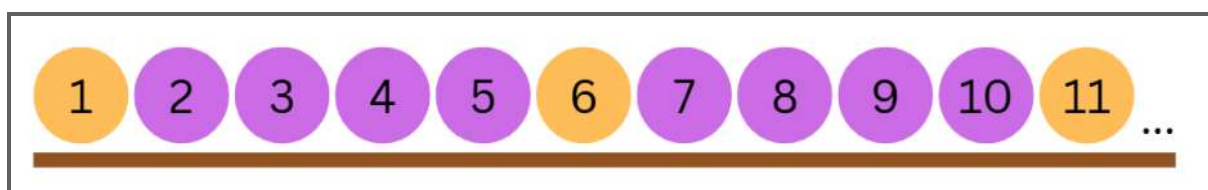
A. Lógica

A lógica é uma das áreas fundamentais do conhecimento, especialmente no contexto matemático, onde desempenha um papel central na construção do raciocínio formal. Ela é responsável por estabelecer critérios e métodos que permitem avaliar a validade de argumentos e conclusões, ajudando a distinguir entre o que é verdadeiro e o que é falso com base em princípios bem definidos.

Ao compreender a lógica, o estudante desenvolve habilidades para pensar de forma estruturada e analítica, o que é essencial não só para a resolução de problemas matemáticos, mas também para a tomada de decisões em diversas situações da vida cotidiana. Este capítulo se dedicará aos fundamentos da lógica, fornecendo exercícios para aprimorar cada vez mais sua habilidade.

A.1 Percepção de padrões

1) O professor de educação física Chagas organiza bolas numeradas amarelas e roxas em uma estante no ginásio da seguinte maneira:



- a) Qual será a próxima bola amarela de número múltiplo de 3?
- b) De qual cor será a bola de número 2026?
- c) Quantas bolas amarelas terão números múltiplos de 3 até a bola número 2026?

2) Antônia ama a palavra “VENN” e a escreveu diversas vezes em seu caderno, sem espaço, como em “VENNVENNVENN”. Depois, decidiu separá-las em sequências, com cada sequência contendo o mesmo número de membros que seu número. Aqui estão as três primeiras sequências:

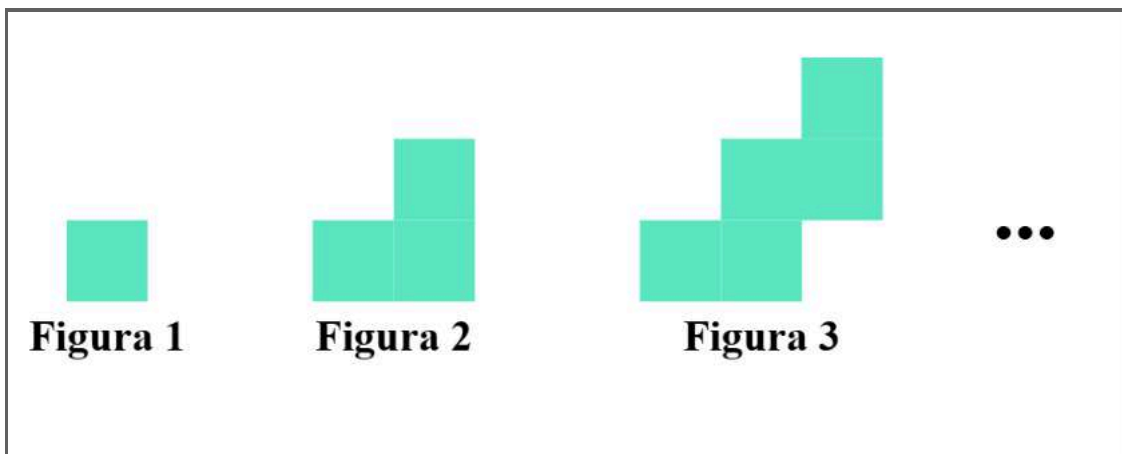
Sequência 1: (V)

Sequência 2: (E, N)

Sequência 3: (N, V, E)

- a) Quais letras formam a sequência 4?
- b) Qual será a última letra do grupo 10?
- c) No grupo 20, a letra N aparece quantas vezes?

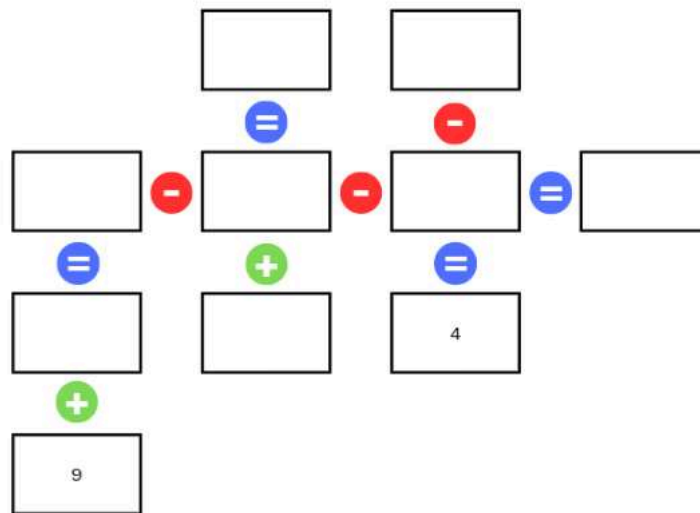
3) Um pai brinca com seu filho de montar escadas com quadradinhos de papel. Cada quadradinho tem 1 cm de lado.



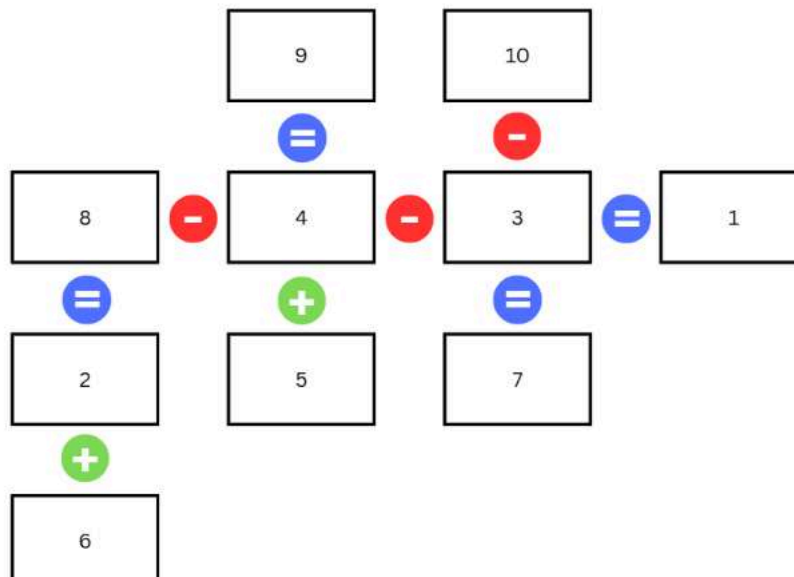
- a) Quais serão o perímetro e a área da figura 4?
- b) Quais serão o perímetro e a área da figura 2026?
- c) É possível fazer uma figura com 2026 cm² de área? E com 2026 cm de perímetro? Justifique.

4) Melissa quer resolver o seguinte problema: completar os seguintes diagramas com números de 1 a 10, de forma que as operações sejam verdadeiras e que os números não se repitam.

a) Complete um dos diagramas escolhidos por Melissa:



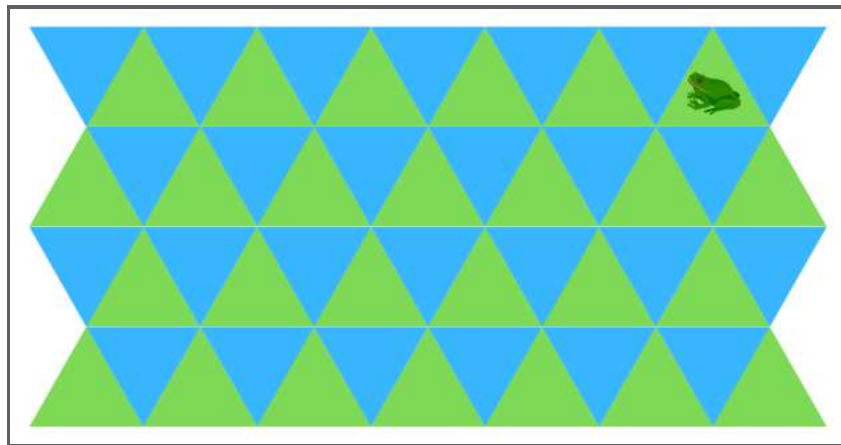
b) Melissa já resolveu o diagrama a seguir. Qual o número mínimo de casas que devem ser dadas no início do exercício para que só exista uma solução?



5) Um sapo salta de uma ilha (triângulo verde) a outra em um lago (triângulos azuis). Ele só consegue se locomover até triângulos vizinhos, como mostrado pelas setas na figura.

Apostila em preto e branco: O sapo no item (a) está em um triângulo verde. Os triângulos que dividem um lado com esse triângulo são todos azuis. Os triângulos que dividem lado com um triângulo azul são todos verdes, e assim por diante.

a) Desenhe, na figura, um caminho de 6 saltos de forma que o sapo volte à ilha inicial.



b) Saindo de uma ilha e fazendo um trajeto de 10 saltos, o sapo parou em uma ilha ou dentro da água? Justifique.

c) Explique por que é impossível que o sapo faça um trajeto completo pelo lago visitando cada triângulo uma única vez.

A.2 Jogos de Verdade e Mentira

1) Júlia e Maria Clara brincam com o seguinte jogo: Maria Clara tenta adivinhar em qual forma geométrica (polígonos de até 10 lados) Júlia está pensando com base nas seguintes perguntas respondidas por Júlia, que pode responder todas verdadeiramente, ou todas falsamente.

1. A forma escolhida tem número de lados maior que 6?
2. A forma escolhida tem nome com menos de 8 letras?
3. A forma escolhida tem a letra A?
4. A forma escolhida tem a letra T?

a) Se Júlia escolheu o quadrilátero, qual será a ordem das respostas, se respondesse verdadeiramente?

b) Por qual afirmativa Maria Clara pode identificar imediatamente se Júlia mentiu ou falou a verdade?

c) Se Júlia respondeu Não, Sim, Sim, Não, em qual polígono pensou?

Resolução:

a) Para o Quadrilátero:

- **Pergunta 1 (Lados > 6?):** Não (possui 4 lados).
- **Pergunta 2 (Nome < 8 letras?):** Não (possui 12 letras).
- **Pergunta 3 (Tem 'A'?):** Sim (Quadrilátero).
- **Pergunta 4 (Tem 'T'?):** Sim (Quadrilátero).

Resposta:

- Se ela falou a verdade: **Não, Não, Sim, Sim.**
- Se ela mentiu: **Sim, Sim, Não, Não.**

b) Pela afirmativa 2: "A forma escolhida tem nome com menos de 8 letras?".

Polígono	Número de lados	Nome
	3	Triângulo
	4	Quadrilátero
	5	Pentágono
	6	Hexágono
	7	Heptágono
	8	Octógono
	9	Eneágono
	10	Decágono

Explicação: Conforme observado na tabela acima, todos os polígonos listados (de 3 a 10 lados) possuem 8 ou mais letras em seus nomes. Portanto, a resposta verdadeira para essa pergunta deve ser sempre "Não". Se Ana responder "Sim" a esta pergunta, Maria Clara saberá imediatamente que ela está mentindo em todas as questões.

c) Vamos analisar a sequência dada: Não, Sim, Sim, Não.

1. Como a segunda resposta foi "Sim" (o que contradiz a verdade, que seria sempre "Não" para a pergunta 2), sabemos que **Júlia está mentindo**.
2. Portanto, devemos **inverter** a sequência dada para descobrir as respostas verdadeiras: **Sim, Não, Não, Sim**.
3. Agora, buscamos um polígono que satisfaça estas condições:
 - **> 6 lados?** Sim (Deve ser Heptágono, Octógono, Eneágono ou Decágono).
 - **< 8 letras?** Não (Consistente com todos).
 - **Tem 'A'?** Não.
 - **Tem 'T'?** Sim.

Analisando os candidatos:

- Heptágono: Tem 'A'. (Incorreto)
- Eneágono: Tem 'A'. (Incorreto)
- Decágono: Tem 'A'. (Incorreto)
- **Octógono**: Não tem 'A' e tem 'T'. (Correto)

Resposta: Júlia pensou no **Octógono**.

2) 3 amigos decidiram jogar “Logicus”, um jogo para descobrir quais pessoas do grupo falam a verdade e quais mentem. O jogo tem as seguintes regras:

- Existem 4 cartas: duas azuis e duas amarelas.
- Cada jogador deve retirar uma carta e dizer em voz alta qual a cor de sua carta.
- Se apenas um jogador mentir, ou se apenas um falar a verdade, o grupo perde.
- Se todos os jogadores mentirem, ou todos os jogadores falarem a verdade, o grupo ganha.

a) Na primeira rodada, todos os jogadores disseram ter cartas azuis. A carta restante também foi azul. Nesta rodada, o grupo ganhou ou perdeu?

b) Na segunda rodada, todos os jogadores disseram ter cartas amarelas. A carta restante foi azul. Nesta rodada, o grupo ganhou ou perdeu?

3) Miguel, Aline e Gabriela decidiram qual flor do jardim Venn era a preferida de cada um:

- Miguel disse que sua flor favorita era a azul de 5 pétalas, mas mentiu sobre o número de pétalas.

- Aline disse que sua flor favorita era a roxa de 8 pétalas, mas mentiu sobre a cor.

- Gabriela disse que sua flor favorita era a rosa de 6 pétalas, mas mentiu sobre a cor e sobre o número de pétalas.



a) Quais flores podem ser a favorita de Miguel?

b) Quais flores podem ser a favorita de Gabriela?

c) Se todos escolheram cores de diferentes formatos e cores, qual é a flor favorita de cada um?

4) Os amigos André, Max, Pedro e Toledo estão conversando em uma viagem de ônibus. Algumas pessoas no ônibus vieram da cidade Falsolândia, e outras são de Verdadópolis. Os falsolandenses sempre mentem, e os verdadopolitanos sempre são verdadeiros. Ao serem parados em um pedágio, os amigos responderam:

André: Max e Pedro são da mesma cidade.

Max: Toledo é verdadopolitano.

Pedro: Max é falsolandense.

Toledo: Todos somos falsolandenses.

a) Toledo é de qual cidade? Justifique.

b) Max é de qual cidade? Justifique.

c) André é de qual cidade? Justifique.

5) Um aventureiro encontrou três caixas coloridas: uma Azul, uma Verde e uma Vermelha. Dentro de apenas uma delas há uma moeda de ouro, e as outras duas estão vazias. Cada caixa possui uma etiqueta com uma frase, mas apenas uma etiqueta diz a verdade.

Caixa Azul: "A moeda não está aqui."

Caixa Verde: "A moeda não está na Caixa Vermelha."

Caixa Vermelha: "A moeda está aqui."

a) Suponha que a etiqueta da Caixa Vermelha seja a verdadeira. Mostre por que isso criaria um absurdo em relação à etiqueta da Caixa Azul.

b) Suponha que a etiqueta da Azul seja a verdadeira. Mostre por que isso criaria um absurdo em relação à etiqueta da Caixa Verde.

c) Qual etiqueta diz a verdade, e em qual caixa está a moeda?

A.3 Paridade e Multiplicidade

Para diversas questões da OBMEP, é necessário entender a paridade, ou seja, a qualidade de certo número de ser par ou ímpar, e a relação que possui com operações matemáticas que envolvem diferentes (par-ímpar) ou semelhantes paridades (par-par, ímpar-ímpar).

Primeiramente, vamos entender este conceito em operações básicas. Observe como esta relação ocorre com a **soma** de dois números inteiros positivos:

Em situações em que a paridade é a mesma, o resultado da soma vai ser um número par. Já em situações em que a paridade é diferente, o resultado sempre será um número ímpar. As expressões a seguir resumem esta relação:

Paridades iguais	Paridades diferentes
$(\text{par}) + (\text{par}) = (\text{par})$	$(\text{par}) + (\text{ímpar}) = (\text{ímpar})$

$(\text{ímpar}) + (\text{ímpar}) = (\text{par})$	$(\text{ímpar}) + (\text{par}) = (\text{ímpar})$
--	--

Agora que já entendemos somas de dois números inteiros, vamos estudar somas de múltiplas parcelas inteiras. Primordialmente, focaremos em entender esta relação em somas de parcelas pares.

Considerando as regras anteriores, uma soma com um número par de parcelas pares (exemplificada pelo número 4) também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\text{Par} + \text{par} + \text{par} + \text{par} =$$

$$(\text{par} + \text{par}) + (\text{par} + \text{par}) =$$

$$\text{par} + \text{par} = \text{par}$$

Já uma soma com um número ímpar de parcelas pares (exemplificada pelo número 3) pode ser escrita do seguinte modo:

$$\text{par} + \text{par} + \text{par} =$$

$$(\text{par} + \text{par}) + \text{par} =$$

$$\text{par} + \text{par} = \text{par}$$

Logo, é possível dizer que **a soma de qualquer quantidade de inteiros pares sempre vai ser um inteiro par.**

Agora, vamos pensar em uma soma de uma **quantidade par** (exemplificada pelo número 4) de parcelas ímpares desta forma:

$$\text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar} =$$

$$(\text{ímpar} + \text{ímpar}) + (\text{ímpar} + \text{ímpar}) =$$

$$\text{par} + \text{par} = \text{par}$$

Assim, é possível dizer que **a soma de uma quantidade par de inteiros ímpares sempre vai ser um inteiro par.**

Agora, vamos pensar na soma de uma quantidade ímpar (exemplificada pelo número 3) de parcelas ímpares desta forma:

$$\text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{ímpar} =$$

$$(\text{ímpar} + \text{ímpar}) + \text{ímpar} =$$

$$\text{par} + \text{ímpar} = \text{ímpar}$$

Assim, é possível dizer que **a soma de uma quantidade ímpar de inteiros ímpares sempre vai ser um inteiro ímpar.**

Já entendemos como a soma de qualquer quantidade de inteiros de paridade semelhante funciona, mas e com inteiros de paridades diferentes? Neste caso, é necessário focar no número de parcelas ímpares presentes na expressão, já que qualquer quantidade dos pares sempre vai ser par.

Se o número de parcelas ímpares for par, o resultado da soma destas também vai ser par, e, ao somar com o número par resultante da soma dos números pares, o resultado final também vai ser par.

Já se o número de parcelas ímpares for ímpar, o resultado da soma destas também vai ser ímpar, e, ao somar com o número par resultante da soma dos números pares, o resultado final será ímpar.

Desse modo, a paridade do resultado da soma de uma quantidade maior que dois de números inteiros de diferentes paridades é a mesma da quantidade de números ímpares somados.

Assim, as regras para a paridade da soma de múltiplas parcelas inteiras são as seguintes:

- A soma de qualquer quantidade de inteiros pares sempre vai ser um inteiro par;
- A soma de uma quantidade par de inteiros ímpares sempre vai ser um inteiro par; e
- A soma de uma quantidade ímpar de inteiros ímpares sempre vai ser um inteiro ímpar.

A soma de uma quantidade maior que dois de números inteiros de diferentes paridades tem a mesma paridade da quantidade de números ímpares somados.

Para a **subtração**, as regras são as mesmas:

Paridades iguais	Paridades diferentes
$(\text{par}) - (\text{par}) = (\text{par})$	$(\text{par}) - (\text{ímpar}) = (\text{ímpar})$
$(\text{ímpar}) - (\text{ímpar}) = (\text{par})$	$(\text{ímpar}) - (\text{par}) = (\text{ímpar})$

Subtração de múltiplas parcelas de números inteiros

- A subtração de qualquer quantidade de inteiros pares sempre vai ser um inteiro par;
- A subtração de uma quantidade par de inteiros ímpares sempre vai ser um inteiro par;
- A subtração de uma quantidade ímpar de inteiros ímpares sempre vai ser um inteiro ímpar.

A subtração de uma quantidade maior que dois de números inteiros de diferentes paridades tem a mesma paridade da quantidade de números ímpares na expressão.

Para a multiplicação, temos as seguintes regras

par x par = par

par x ímpar = ímpar x par = par

ímpar x ímpar = ímpar

Já para a divisão, temos as seguintes regras

- Se a divisão de um par por um ímpar resultar em um inteiro, este será par
- Se a divisão de um ímpar por um ímpar resultar em um inteiro, este será ímpar
- Se a divisão de um par por um par resultar em um inteiro, este poderá ser tanto par quanto ímpar
- A divisão de um número inteiro ímpar por um par nunca resulta em um número inteiro.

Multiplicidade, regras básicas de divisibilidade, fatoração em números primos.

A Multiplicidade pode ser explicada como a característica de um número ser múltiplo de outro, ou seja, resultar de multiplicação deste número por algum outro inteiro. Ou seja, se olharmos para uma tabuada infinita do número 4, encontraremos nos resultados todos os números múltiplos de 4.

Por sua vez, um número ser divisível por outro significa que a divisão deste pelo número inicial resulta em um inteiro e resto zero. Por exemplo, 12 é divisível por 4, pois esta divisão resulta em 3, um número inteiro, e o resto é zero.

Portanto, podemos dizer que a multiplicidade e a divisibilidade são dois lados da mesma moeda, pois descrevem a mesma relação, porém de maneira inversa.

Alguns números têm regras que tornam mais fácil identificar se outro valor pode ser dividido por ele ou não. As afirmações a seguir são muito utilizadas para otimizar o tempo e entender as relações ou padrões de questões.

Regra de divisibilidade do número 2: O último algarismo de um número deve ser divisível por 2, ou seja, o número deve ser par.

Regra de divisibilidade do número 3: A soma de todos os seus algarismos deve resultar em um número múltiplo de 3. Ex: $561 \rightarrow 5 + 6 + 1 = 12$

Regra de divisibilidade do número 4: Os dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Ex: $624 \rightarrow 24$ é divisível por 4, logo, 624 também é.

Regra de divisibilidade do número 5: O último algarismo do número deve ser 0 ou 5.

Regra de divisibilidade do número 6: O número deve ser divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo, ou seja, precisa ser par e ter a soma de seus algarismos múltipla de 3.

Regra de divisibilidade do número 8: Os três últimos algarismos devem formar um número divisível por 8.

Regra de divisibilidade do número 9: A soma de todos os seus algarismos deve resultar em um número múltiplo de 9. Ex: $198 \rightarrow 1 + 9 + 8 = 18$

Regra de divisibilidade do número 10: O último algarismo do número deve ser 0.

Alguns números não têm divisores além deles próprios e do número 1 (ex: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...). Estes são chamados de números primos, e são considerados os pilares que formam todos os outros números, pois todos podem ser escritos por uma multiplicação de números primos. Este processo, chamado de decomposição por números primos, é a base para a resolução de diversos problemas, e consiste em descobrir quais primos foram multiplicados para formar um número.

Para realizá-lo, inicia-se a verificar e a se dividir um número pelos menores números primos e aumentando os divisores até o resultado final ser 1. Por exemplo, vamos utilizar o número 420. Ele é divisível por 2, pois é par, o que gera o resultado 210. Este número ainda é divisível por 2, com resultado 105. Como os algarismos deste tem soma 6, ele também é divisível por 3, resultando em 35. Ele não é divisível por 3, mas é divisível pelo próximo primo, 5, resultando em 7. Como 7 também é primo, o resultado final será $7/7 = 1$.

Como dividimos por 2 duas vezes, por 3, por 5 e por 7, 420 também pode ser escrito como $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

1) Um gafanhoto pulando ao longo de uma reta pode pular 6 ou 8 polegadas em qualquer sentido. Ele pode alcançar um ponto que está:

- a) a 1,5 polegada da posição original?

b) A 7 polegadas

c) A 4 polegadas

2) Aline gosta de brincar de formar sequências de números. Hoje, ela brincou os números de 1 a 10, sem repetir nenhum. Ela considera uma sequência “vennerável” quando a soma de quaisquer números vizinhos têm a mesma paridade.

a) Complete a sequência a seguir, de modo que ela seja vennerável:

1 4 _ _ _ _ _

b) Apresente uma sequência vennerável que utilize os 10 números

c) Explique por que é impossível que exista uma sequência vennerável de 10 números que comece com 2 números de mesma paridade.

Resolução:

Uma sequência é "vennerável" quando a soma de quaisquer números vizinhos tem a mesma paridade (ou seja, todas as somas dão ímpar, ou todas as somas dão par).

- a)** A soma dos primeiros vizinhos ($1 + 4$) resulta em 5, que é ímpar. Para que a soma de qualquer par vizinho seja ímpar, é obrigatório intercalar números ímpares e pares (Ímpar + Par = Ímpar). Como a sequência começa com Ímpar (1), Par (4), ela deve continuar alternando: Ímpar, Par, Ímpar, Par, Ímpar. Possível resposta: 1, 4, 3, 2, 5, 6, 7 (Note que $4+3=7$, $3+2=5$, $2+5=7$, $5+6=11$, $6+7=13$; todas as somas são ímpares).
- b)** Basta seguir a regra de intercalar números ímpares e pares do 1 ao 10. Resposta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (Todas as somas de vizinhos resultarão em números ímpares).
- c)** Se a sequência começar com 2 números de mesma paridade (dois pares ou dois ímpares), a soma deles será Par. Para a sequência ser vennerável, todas as somas de vizinhos subsequentes também teriam que ser pares. Para que dois números somem par, eles precisam ter a mesma paridade. Isso criaria uma reação em cadeia exigindo que todos os 10 números tivessem a mesma paridade. Como de 1 a 10 temos apenas 5 números pares e 5 ímpares, é impossível formar uma sequência de 10 números só com pares ou só com ímpares.

3) Melissa e Antônia colhem flores em um jardim com um único cesto.

- Melissa sempre colhe 2 flores de cada vez.
- Antônia sempre colhe 6 flores de cada vez.

O cesto já continha 5 flores antes de começarem a colher.

- a)** Quantas flores terão no cesto após cada uma colher 2 vezes?
- b)** Qual será uma maneira de Melissa e Antônia colherem de forma que fiquem 15 flores no cesto?
- c)** Explique por que a cesta nunca ficará com 2026 pedaços após o fim da colheita.

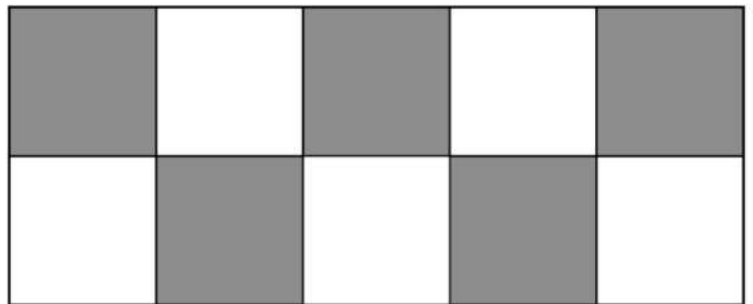
4) Pedro escreveu em seu caderno os números de 1 a 10 e colocou um sinal de adição entre eles, obtendo a soma: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

a) Qual é o valor dessa soma inicial? Esse valor é par ou ímpar?

b) Se Pedro trocar exatamente um sinal de adição por um sinal de subtração, a nova soma resultante será par ou ímpar? Justifique sua resposta.

c) Explique por que, mesmo trocando alguns sinais de adição por subtração, não é possível que o resultado da expressão seja 0.

5) Um tabuleiro retangular é dividido em 10 casas iguais, pintadas alternadamente de cinza e branco, como em um tabuleiro de xadrez. Inicialmente, há exatamente uma bolinha em cada casa. As bolinhas são movimentadas em etapas, seguindo às seguintes regras:



- Escolhe-se duas bolinhas quaisquer;
- Em seguida, desloca-se uma dessas bolinhas para uma casa vizinha na horizontal (para a esquerda ou para a direita) e, simultaneamente, desloca-se a outra bolinha para uma casa vizinha na vertical (para cima ou para baixo).

a) Descreva uma sequência de exatamente duas etapas de movimentos que resulte nas duas casas da primeira coluna (a mais à esquerda) totalmente vazias.

b) Explique por que, partindo do tabuleiro inicial e após qualquer número de etapas, a quantidade total de bolinhas ocupando as casas brancas do tabuleiro será sempre um número ímpar.

c) Explique por que é impossível, partindo do tabuleiro inicial, realizar uma série de etapas que coloque todas as 10 bolinhas em uma mesma casa.

Resolução:

a) Identificaremos as casas por coordenadas (Linha, Coluna). A primeira coluna possui as casas (1,1) e (2,1).

- **Etapá 1:** Escolha as bolinhas que estão em (1,1) e (2,1). Mova a bolinha de (1,1) na horizontal para a casa vizinha (1,2). Mova a bolinha de (2,1) na vertical para a casa (1,1). *Resultado:* A casa (2,1) fica vazia. A casa (1,1) agora tem 1 bolinha (a que veio de baixo).
- **Etapá 2:** Escolha a bolinha que está agora em (1,1) e qualquer outra bolinha no resto do tabuleiro (por exemplo, a de (2,2)). Mova a bolinha de (1,1) na horizontal para (1,2). Mova a bolinha de (2,2) na vertical para (1,2). *Resultado:* Ambas as casas da primeira coluna (1,1) e (2,1) estão totalmente vazias.

b) No tabuleiro, qualquer movimento para uma casa vizinha (seja vertical ou horizontal) faz com que a bolinha mude para uma casa de cor diferente. Em cada etapa, exatas 2 bolinhas se movem (e ambas mudam de cor). Existem três cenários possíveis para essas duas bolinhas em um turno:

1. Ambas estavam no branco: movem-se para o cinza. (Bolinhas no branco variam -2).
2. Ambas estavam no cinza: movem-se para o branco. (Bolinhas no branco variam +2).
3. Uma no branco e uma no cinza: a branca vai pro cinza (-1) e a cinza vai pro branco (+1). (A variação líquida é 0). Como a variação no número de bolinhas nas casas brancas será sempre um número par (+2, -2 ou 0), a paridade (ser par ou ímpar) nunca muda. Como iniciamos o jogo com 5 bolinhas em casas brancas (um número **ímpar**), essa quantidade continuará ímpar para sempre, não importa o número de etapas.

c) Se fosse possível colocar as 10 bolinhas em uma única casa, essa casa específica seria Branca ou Cinza.

- Se for uma casa Branca, haveria 10 bolinhas em casas brancas (10 é um número **par**).
- Se for uma casa Cinza, haveria 0 bolinhas em casas brancas (0 é um número **par**). No entanto, conforme demonstrado no item anterior, o número de bolinhas em casas brancas é invariável e será **sempre ímpar**. Portanto, é matematicamente impossível chegar a um cenário com 10 ou 0 bolinhas na cor branca.

A.4 Números especiais

→ Problemas desse tipo normalmente definem um “número especial” (número legal, famoso, interessante etc.) que deve satisfazer certas propriedades envolvendo seus algarismos.

→ As principais ideias utilizadas são:

- divisibilidade;
- análise de casos;
- propriedades dos algarismos;
- organização lógica.

Questão 1: OBMEP 2018 — Nível 2 — Fase 2 — Questão 2

Um número inteiro positivo é chamado interessante quando termina com um algarismo que é igual ao produto de seus demais algarismos.

Exemplos:

- 326 é interessante, pois:
 $3 \times 2 = 6$
- 1020 é interessante, pois:
 $1 \times 0 \times 2 = 0$

a) Quantos números interessantes de dois algarismos existem?

Resolução:

Um número de dois algarismos possui a forma:

$$10a + b$$

Para ser interessante:

$$a = b$$

pois o último algarismo deve ser igual ao produto dos anteriores, e há apenas um algarismo anterior.

Logo, os números são:

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 e 99.

Portanto, existem:

9 números.

Resposta: 9

b) Quantos números interessantes de três algarismos existem?

Resolução:

Um número de três algarismos possui a forma:

$$100a + 10b + c$$

A condição da questão é:

$$ab = c$$

Como c é um algarismo, devemos ter:

$$ab \leq 9$$

Agora analisamos os casos.

Caso $a = 1$

b pode ser:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Total:

10 casos.

Caso $a = 2$

$$2b \leq 9$$

Então:

$b = 0, 1, 2, 3, 4$

Total:

5 casos.

Caso $a = 3$

$$3b \leq 9$$

Então:

$b = 0, 1, 2, 3$

Total:

4 casos.

Caso $a = 4$

$$4b \leq 9$$

Então:

$b = 0, 1, 2$

Total:

3 casos.

Casos $a = 5, 6, 7, 8, 9$

Em todos:

$b = 0$ ou 1

Total:

2 casos para cada valor de a .

Assim:

$$10 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 32$$

Resposta: 32

Observação:

A principal ideia da questão é perceber que o produto dos algarismos precisa continuar sendo um único algarismo, o que reduz muito os casos possíveis.

Atente-se a questões como essa, uma vez que exercícios como esse são recorrentes, em especial, na segunda fase da OBMEP!

Questão 2: OBMEP 2023 — Nível 2 — Fase 2 — Questão 1

Aninha possui cartões numerados de 1 a 9. Ela forma sequências colocando alguns cartões lado a lado.

Uma sequência é chamada especial quando, para quaisquer dois cartões vizinhos, um dos números é múltiplo do outro.

- a) Encontre uma sequência especial com 7 cartões começando com 6 e 2.

Resolução:

Precisamos garantir que quaisquer dois vizinhos satisfaçam:

- um é múltiplo do outro.

Uma sequência válida é:

6, 2, 4, 8, 1, 3, 9

Verificando:

- 6 é múltiplo de 2;
- 4 é múltiplo de 2;
- 8 é múltiplo de 4;
- todo número é múltiplo de 1;
- 9 é múltiplo de 3.

Portanto, a sequência é válida.

b) Explique por que é impossível formar uma sequência especial com os 9 cartões.

Resolução:

Observe os números 5 e 7.

O número 5:

- não é múltiplo de nenhum outro número entre 1 e 9;
- só possui relação com o número 1.

O mesmo acontece com o número 7.

Assim:

- o 5 precisa ficar ao lado do 1;
- o 7 também precisa ficar ao lado do 1.

Mas o 1 possui apenas dois lados disponíveis.

Logo, o 1 ficaria “preso” entre 5 e 7:

5 – 1 – 7

Não sobra espaço para conectar todos os outros números na mesma sequência.

Portanto, é impossível construir uma sequência especial utilizando os 9 cartões.

Resposta: É impossível.

Questão 3: OBMEP 2025 — Nível 2 — Fase 2 — Questão 4

Um número é chamado especial quando é formado apenas pelos algarismos 0, 2 e 5.

Emiliano escreveu todos os números especiais em ordem crescente, começando em 0 e terminando em 2025.

Quantos números Emiliano escreveu?

Resolução:

Precisamos contar todos os números formados apenas pelos algarismos:

0, 2 e 5

que sejam menores ou iguais a 2025.

Números com 1 algarismo:

Possibilidades: 0, 2, 5

Total: 3 números.

Números com 2 algarismos:

O primeiro algarismo não pode ser 0.

Primeiro algarismo:

2 opções:

2 ou 5.

Segundo algarismo:

3 opções:

0, 2 ou 5.

Total:

$2 \times 3 = 6$ números.

Números com 3 algarismos:

Primeiro algarismo: 2 opções.

Os outros dois: 3 opções cada.

Total: $2 \times 3 \times 3 = 18$ números.

Números com 4 algarismos menores ou iguais a 2025:

O primeiro algarismo deve ser 2, pois números começando com 5 ultrapassariam 2025.

Agora analisamos os demais algarismos.

Temos: 2abc

com: $a, b, c \in \{0, 2, 5\}$

e: $2abc \leq 2025$

Se o segundo algarismo for 0:

Temos: 20bc

Ou seja:

bc pode ser: 00, 02, 05, 20, 22, 25

pois: 2052 e 2055 ultrapassam 2025.

Total: 6 números.

Se o segundo algarismo for 2:

Temos: 22bc

Todos ultrapassam 2025.

Logo: 0 casos.

Se o segundo algarismo for 5:

Também ultrapassam 2025.

Logo: 0 casos.

Total geral:

$$3 + 6 + 18 + 6 = 33$$

Resposta: 33

Problema 1: “Número legal”

O professor Igor passou aos seus alunos a missão de descobrir quais os números podem ser considerados legais. O aluno que acertou o exercício passado pelo professor foi Gabriel, visto que já havia se preparado para questões como essa a partir da apostila de matemática do Time Venn. As instruções do professor diziam que um número de 4 algarismos é chamado legal quando:

- os algarismos são distintos;
- o último algarismo é igual ao produto dos outros três.

Qual foi a resposta obtida por Gabriel?

Resolução:

Precisamos de números em que:

$$a \times b \times c = d$$

com:

- d sendo um algarismo;
- todos os algarismos distintos.

Como d é um algarismo, devemos ter:

$$abc \leq 9$$

Agora analisamos os produtos possíveis.

Produto 0:

Um dos três primeiros Algarismos deve ser 0.

Exemplo:

1020

Mas não podemos repetir Algarismos.

Produto 1:

Só seria possível com:

$$1 \times 1 \times 1$$

Mas há repetição.

Inválido.

Produto 2:

Só seria possível com:

$$1 \times 1 \times 2$$

Há repetição.

Inválido.

Produto 6:

Temos:

$$1 \times 2 \times 3 = 6$$

Os três primeiros Algarismos podem ser organizados de:

$3! = 6$ formas.

Logo: 6 números.

Produto 8:

Temos:

$$1 \times 2 \times 4 = 8$$

Novamente:

$$3! = 6$$

formas.

Logo: 6 números.

Total:

$$6 + 6 = 12$$

Resposta: 12

Problema 2: “Número escalonado”

Ana Margarida, uma garota muito esperta, no processo de preparação para a OBMEP, imaginou-se como criadora das questões da prova. A questão que elaborou enquanto pensava foi a seguinte:

Um número de 5 algarismos é chamado escalonado quando:

- cada algarismo é múltiplo do anterior;
- todos os algarismos são distintos;
- nenhum algarismo é zero.

Existe algum número escalonado?

Resolução:

Precisamos de:

$$a \mid b \mid c \mid d \mid e$$

com todos distintos entre 1 e 9.

A maior cadeia possível é:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$$

Depois disso:

- 8 não possui múltiplos distintos entre 1 e 9.

Assim, não conseguimos formar uma cadeia com 5 algarismos distintos.

Resposta: Não existe nenhum número escalonado.

Problema 3: “O número secreto”

Bernardo pensou em um número de 5 algarismos.

Emanuel percebeu que:

- todos os algarismos eram diferentes;
- os algarismos estavam em ordem crescente.

Leo descobriu ainda que:

- a soma dos algarismos era 19.

Quantos números poderiam ser o número secreto de Bernardo?

Resolução:

Como os algarismos estão em ordem crescente, cada conjunto de 5 algarismos distintos gera exatamente um número.

Precisamos encontrar conjuntos de 5 algarismos distintos cuja soma seja 19.

Passo 1: Começando com 0

Se o menor algarismo é 0, precisamos: $a + b + c + d = 19$

com: $0 < a < b < c < d$

Possibilidades:

0, 1, 2, 7, 9
0, 1, 2, 8, 8 ✗
0, 1, 3, 6, 9
0, 1, 3, 7, 8
0, 1, 4, 5, 9
0, 1, 4, 6, 8
0, 1, 5, 6, 7
0, 2, 3, 5, 9
0, 2, 3, 6, 8
0, 2, 3, 7, 7 ✗
0, 2, 4, 5, 8
0, 2, 4, 6, 7
0, 3, 4, 5, 7

Total:

11 conjuntos válidos.

Passo 2: Começando com 1

Tem-se: $1 + a + b + c + d = 19$

Logo: $a + b + c + d = 18$

com: $1 < a < b < c < d$

Possibilidades:

1, 2, 3, 4, 9

1, 2, 3, 5, 8

1, 2, 3, 6, 7

1, 2, 4, 5, 7

1, 3, 4, 5, 6

Total:

5 conjuntos.

Passo 3: Começando com 2

O menor conjunto possível seria: 2, 3, 4, 5, 6

A soma é: 20 (o que já ultrapassa 19).

Logo, não existem outros casos.

Total final: $11 + 5 = 16$

Resposta: Existem 16 possíveis números secretos.

A.5 Jogos lógicos

Imagine uma escada com infinitos degraus. Imaginou? Perfeito. Agora, responda à pergunta a seguir: é possível alcançar qualquer degrau dessa escada? Bom, infelizmente não temos essa resposta ainda, já que não conhecemos a escada. Pode ser uma escada com degraus de 1000m de altura, em que você não conseguiria ultrapassar o primeiro degrau, ou então uma escada feita de água, que faria você cair ao pisar em qualquer degrau. Ao chegar na frente da escada, entretanto, você vê um porteiro, um tipo de guardião, e ele te dá as seguintes informações:

1. Você consegue alcançar o primeiro degrau;
2. Estando em um degrau, você consegue alcançar o degrau seguinte.

Agora, com essas informações, temos a resposta para o nosso problema! Considere a função $F(x)$ como “você consegue alcançar o degrau x ”. Traduzindo as informações que o porteiro nos deu para a linguagem matemática temos:

1. $F(1)$ é verdadeiro.
2. se $F(n)$ é verdadeiro, $F(n + 1)$ também é verdadeiro.

Utilizando essas duas afirmações, sabemos que $F(2)$ é verdadeiro, uma vez que $F(1)$ é verdadeiro. Aplicando a mesma lógica mais uma vez, verificamos que $F(3)$ é verdadeiro agora, já que $F(2)$ é verdadeiro. Percebeu o padrão? Ao aplicar essa lógica n vezes,

verificamos que $F(n + 1)$ é verdadeiro. Em linguagem matemática, isso seria generalizado como “ $F(x)$ é verdadeiro para todo x natural ($x \in \mathbb{N}$)”

O método utilizado acima se chama indução matemática. Nesse exemplo, especificamente, utilizamos a indução matemática estrutural, que é uma derivação da indução matemática fraca. Não entraremos profundamente nesse tópico neste capítulo, entretanto, você verá que o raciocínio utilizado acima será de grande ajuda na resolução dos problemas. A conclusão que tiramos daqui é: comece por casos pequenos (casos base), identifique padrões e relações lógicas, verifique se elas valem para os próximos casos e, finalmente, aplique-as! Agora, sem mais enrolações, vamos aos exercícios.

Problema 1: O jogo das moedas

Miguel e Gabriel colocaram 20 moedas sobre uma mesa. Em cada jogada, o jogador da vez pode retirar **1, 2 ou 3 moedas**, vencendo quem retirar a última moeda.

Miguel joga primeiro. Quem possui uma estratégia vencedora?

Resolução:

Vamos analisar os primeiros casos:

- Com 1 moeda, quem joga vence.
- Com 2 moedas, quem joga vence.
- Com 3 moedas, quem joga vence.
- Com 4 moedas, qualquer jogada deixa 1, 2 ou 3 moedas para o adversário, que vence.

Assim, 4 é uma posição perdedora. Continuando:

- $5 \rightarrow$ retirar 1 e deixar 4.
- $6 \rightarrow$ retirar 2 e deixar 4.
- $7 \rightarrow$ retirar 3 e deixar 4.

Logo, 5, 6 e 7 são posições vencedoras. Depois:

- 8 é perdedora.

Percebemos que as posições perdedoras são:

4, 8, 12, 16, 20,...

Como o jogo começa com 20 moedas, Miguel inicia em uma posição perdedora. Se Gabriel responder corretamente às jogadas de Miguel, sempre devolverá o jogo para outro múltiplo de 4.

Resposta: Gabriel possui estratégia vencedora.

Problema 2: Caminhando no tabuleiro

Ana Margarida está no canto inferior esquerdo de um tabuleiro quadrado de 5×5 . Em cada movimento ela pode andar apenas:

- uma casa para cima;
- ou uma casa para a direita.

De quantas maneiras diferentes ela pode chegar ao canto superior direito?

Resolução:

Para sair do canto inferior esquerdo e chegar ao canto superior direito, Ana Margarida precisa fazer exatamente:

- **4 movimentos para cima;**
- **4 movimentos para a direita.**

Ao todo, serão **8 movimentos**.

Agora basta contar de quantas maneiras podemos distribuir os 4 movimentos para cima entre essas 8 posições (os demais movimentos serão automaticamente para a direita).

Podemos escolher as posições dos movimentos para cima da seguinte forma:

- escolher a 1ª posição: 8 opções;
- escolher a 2ª posição: 7 opções;
- escolher a 3ª posição: 6 opções;
- escolher a 4ª posição: 5 opções.

Isso fornece:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

Entretanto, cada conjunto de quatro posições foi contado várias vezes, pois a ordem em que escolhemos essas posições não importa.

Como podemos escolher essas quatro posições em $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ordens diferentes, devemos dividir por 24.

Assim, $1680 \div 24 = 70$.

Logo, existem **70 caminhos diferentes**.

Resposta: 70 caminhos.

Problema 3: O jogo da troca

Maria Antônia escreveu cinco números: 2, 4, 6, 8 e 10. Uma jogada consiste em escolher dois números e trocar ambos por sua diferença positiva. É possível, após várias jogadas, terminar com cinco números iguais?

Resolução:

- Observe que todos os números são pares.
- A diferença entre dois números pares também é par.
- Assim, durante todo o jogo, todos os números continuarão sendo pares.
- Se todos terminassem iguais, seriam cinco números pares iguais.

Além disso, a soma inicial é $2+4+6+8+10=30$.

Como cada substituição altera essa soma de maneira que não preserva necessariamente seu valor, devemos procurar um invariante mais simples.

Todos os números permanecem múltiplos de 2.

Entretanto, ao fazer algumas jogadas, sempre aparecerá o número 0 quando dois valores iguais forem escolhidos.

Como o jogo exige diferença positiva, **isso nunca acontece**.

Logo, jamais conseguiremos igualar todos os números.

Resposta: Não é possível.

Problema 4: O interruptor misterioso

Há 100 lâmpadas inicialmente apagadas. Na primeira rodada, Bernardo troca o estado de todas. Na segunda rodada, troca apenas as posições múltiplas de 2. Na terceira, apenas as múltiplas de 3. O processo continua até a centésima rodada. Quantas lâmpadas permanecem acesas?

Resolução:

Cada lâmpada troca de estado uma vez para cada divisor que possui. Assim:

- quem possui número par de divisores termina apagada;
- quem possui número ímpar de divisores termina acesa.

Apenas os quadrados perfeitos possuem quantidade ímpar de divisores. Os quadrados perfeitos menores ou iguais a 100 são: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

Ou seja, são 10 números.

Resposta: Permanecem acesas 10 lâmpadas.

Problema 5: Dominando o tabuleiro

Gabi desenhou um tabuleiro 8×8 e retirou dois cantos opostos. É possível cobrir completamente o restante do tabuleiro usando apenas peças de dominó 2×1 ?

Resolução:

Colorimos o tabuleiro como um tabuleiro de xadrez. Cada dominó sempre cobre:

- uma casa preta;
- uma casa branca.

Entretanto, dois cantos opostos possuem a mesma cor. Ao removê-los, sobram:

- 30 casas de uma cor;
- 32 da outra.

Como cada dominó cobre exatamente uma casa de cada cor, isso é impossível.

Resposta: Não é possível.

Problema 6: O jogo da escada

Natália está no primeiro degrau de uma escada com 12 degraus. Em cada jogada ela pode subir:

- 1 degrau;
- ou 2 degraus.

De quantas maneiras diferentes ele pode alcançar o último degrau?

Resolução:

Vamos calcular o número de maneiras de chegar a cada degrau.

Para chegar a um determinado degrau, Natália pode ter vindo apenas de duas formas:

- subindo **1 degrau** a partir do degrau anterior;
- subindo **2 degraus** a partir de dois degraus antes.

Assim, o número de maneiras de chegar a um degrau é a soma do número de maneiras de chegar aos dois degraus anteriores.

Como Natália já está no primeiro degrau, temos:

- 1º degrau: 1 maneira (ela já começa nele).
- 2º degrau: 1 maneira (subir um degrau).
- 3º degrau: 2 maneiras.
- 4º degrau: 3 maneiras.
- 5º degrau: 5 maneiras.
- 6º degrau: 8 maneiras.
- 7º degrau: 13 maneiras.

- 8º degrau: 21 maneiras.
- 9º degrau: 34 maneiras.
- 10º degrau: 55 maneiras.
- 11º degrau: 89 maneiras.
- 12º degrau: 144 maneiras.

Logo, Natália pode chegar ao último degrau de **144 formas diferentes**.

Resposta: 144 maneiras.

Problema 7: O tabuleiro colorido

André possui um tabuleiro 6×6 totalmente branco. Cada jogada consiste em escolher uma linha inteira ou uma coluna inteira e trocar a cor de todas as casas dessa linha ou coluna. É possível terminar com exatamente uma casa preta?

Resolução:

Sempre que uma linha é escolhida, 6 casas mudam de cor. O mesmo ocorre com qualquer coluna. Assim, a quantidade total de casas pretas muda sempre de um número par.

Inicialmente existem: 0 casas pretas.

Logo, a paridade da quantidade de casas pretas permanece sempre par.

Como 1 é ímpar, essa configuração **nunca poderá ser obtida**.

Resposta: Não é possível.

Problema 8: O jogo dos palitos

Há 15 palitos sobre a mesa e Júlia e Sophia iniciam um jogo, sendo Júlia a primeira a jogar e Sophia a segunda, alternando suas jogadas por meio de rodadas. Em cada rodada, a jogadora pode retirar:

- exatamente 1;
- exatamente 4;
- exatamente 5 palitos.

Vence quem retirar o último. Quem possui estratégia vencedora?

Resolução:

Analisemos as primeiras posições.

- 1 → vencedora.
- 2 → perdedora.

- 3 → vencedora.
- 4 → vencedora.
- 5 → vencedora.
- 6 → vencedora.
- 7 → perdedora.

Continuando:

As posições perdedoras são:

2, 7, 9, 14,...

Como 15 permite retirar 1 palito e deixar 14 ao adversário, o primeiro jogador consegue entregar uma posição perdedora.

Depois disso, basta sempre responder de forma a devolver outra posição perdedora.

Resposta: O primeiro jogador possui estratégia vencedora.

Problema 9: A corrida das peças

Em um tabuleiro existem três peças. Em cada jogada, o jogador escolhe apenas uma peça e a move exatamente uma casa para a direita. Vence quem realizar a última jogada possível.

Inicialmente as peças estão nas colunas: 2, 5 e 8 e nenhuma peça pode ultrapassar a coluna 10.

Quem possui estratégia vencedora?

Resolução:

Cada peça possui um número limitado de movimentos.

- A peça da coluna 2 pode andar 8 vezes.
- A peça da coluna 5 pode andar 5 vezes.
- A peça da coluna 8 pode andar 2 vezes.

Ao todo, existem $8 + 5 + 2 = 15$ movimentos possíveis.

Como cada jogada realiza exatamente um movimento, o jogo termina após 15 jogadas.

Como 15 é ímpar, quem realiza a primeira jogada também realiza a última.

Resposta: O primeiro jogador possui estratégia vencedora.

Questões propostas:

1) Um mini-tabuleiro 3×3 tem todas as 9 casas inicialmente pintadas de branco. Uma "jogada válida" consiste em escolher um quadrado 2×2 qualquer dentro do tabuleiro e inverter a cor de suas 4 casas (o que é branco vira preto, o que é preto vira branco).

- a) Mostre como, após 2 jogadas válidas, é possível deixar exatamente 4 casas pretas no tabuleiro.
- b) É possível, através de uma sequência de jogadas válidas, deixar o tabuleiro inteiro pintado de preto? Justifique.
- c) Prove que é impossível chegar a um estado em que exatamente uma única casa do tabuleiro esteja preta.

- a) Mostre como, após 2 jogadas válidas, é possível deixar exatamente 4 casas pretas no tabuleiro.

Resolução:

Vamos numerar as casas do tabuleiro.

1 2 3

4 5 6

7 8 9

Primeiro, escolhemos o quadrado formado pelas casas: 1, 2, 4 e 5.

O tabuleiro passa a ter essas quatro casas pretas.

Na segunda jogada, escolhemos o quadrado formado pelas casas: 2, 3, 5 e 6.

As casas 2 e 5 voltam a ficar brancas, enquanto as casas 3 e 6 ficam pretas.

Ao final, as casas pretas são: 1, 3, 4 e 6. Portanto, restam exatamente quatro casas pretas.

Resposta: Uma sequência possível é escolher, nessa ordem, os quadrados superiores esquerdo e superior direito.

- b) É possível, através de uma sequência de jogadas válidas, deixar o tabuleiro inteiro pintado de preto? Justifique.

Resolução:

Sim. Basta realizar uma jogada em cada um dos quatro quadrados 2×2 times 22×2 do tabuleiro:

- superior esquerdo;
- superior direito;
- inferior esquerdo;
- inferior direito.

Vamos analisar quantas vezes cada casa é invertida.

- Cada canto pertence a apenas um quadrado e será invertido uma vez.
- Cada casa do meio de um lado pertence a dois quadrados e será invertida duas vezes.
- A casa central pertence aos quatro quadrados e será invertida quatro vezes.

Assim:

- os quatro cantos ficam pretos;
- as quatro casas centrais das bordas continuam brancas;
- a casa central continua branca.

Como ainda não obtivemos o tabuleiro todo preto, fazemos mais uma jogada no quadrado superior esquerdo.

Essa jogada altera exatamente as casas necessárias para completar o processo, e uma sequência apropriada de jogadas permite pintar todas as casas de preto.

Logo, é possível chegar ao tabuleiro completamente preto.

Resposta: Sim, é possível.

c) Prove que é impossível chegar a um estado em que exatamente uma única casa do tabuleiro esteja preta.

Resolução:

Observe que, em cada jogada, exatamente quatro casas mudam de cor.

Se uma casa muda de branca para preta, a quantidade de casas pretas aumenta em 1. Se muda de preta para branca, essa quantidade diminui em 1.

Assim, em uma mesma jogada, a quantidade de casas pretas sempre varia em um número par, pois quatro casas são alteradas. Inicialmente existem 0 casas pretas, quantidade que é par.

Como a paridade da quantidade de casas pretas nunca muda, após qualquer sequência de jogadas sempre haverá uma quantidade par de casas pretas. Entretanto, uma única casa preta corresponde à quantidade 1, que é ímpar. Isso contradiz o invariante da paridade.

Resposta: É impossível obter exatamente uma casa preta, pois a quantidade de casas pretas permanece sempre par durante todo o jogo.

2) Cinco moedas estão dispostas em formato de círculo sobre uma mesa. Inicialmente, uma moeda mostra a face Coroa e as outras quatro mostram a face Cara. Uma "jogada" consiste em tocar em uma moeda; ao fazer isso, a moeda tocada e suas duas vizinhas imediatas (à direita e à esquerda) são viradas ao contrário.

a) Mostre como deixar todas as 5 moedas com a face Cara virada para cima em apenas 2 jogadas.

b) Se começarmos o jogo com todas as 5 moedas mostrando Coroa, é possível deixar todas mostrando Cara após algumas jogadas? Se sim, mostre como; se não, explique o porquê.

c) Suponha que o jogo seja feito com 6 moedas dispostas em círculo, começando com uma Coroa e cinco Caras. Prove que é impossível deixar todas com a face Cara.

a) Mostre como deixar todas as 5 moedas com a face Cara virada para cima em apenas 2 jogadas.

Resolução:

Numere as moedas de 1 a 5 no sentido horário e suponha que apenas a moeda 1 esteja mostrando Coroa.

- Na primeira jogada, toque na moeda 3. Assim, as moedas 2, 3 e 4 são viradas.
- Na segunda jogada, toque na moeda 1. Assim, as moedas 5, 1 e 2 são viradas.

Ao final dessas duas jogadas, todas as moedas ficam mostrando a face Cara.

Resposta: Basta tocar, por exemplo, nas moedas 3 e 1, nessa ordem.

b) Se começarmos o jogo com todas as 5 moedas mostrando Coroa, é possível deixar todas mostrando Cara após algumas jogadas? Se sim, mostre como; se não, explique o porquê.

Resolução: Sim. Novamente, numere as moedas de 1 a 5. Faça as seguintes jogadas:

- toque na moeda 1;
- depois na moeda 2;
- por fim, na moeda 5.

Após essas três jogadas, todas as moedas passam a mostrar a face Cara. Logo, é possível atingir o objetivo.

Resposta: Sim. Uma sequência possível é tocar nas moedas 1, 2 e 5.

c) Suponha que o jogo seja feito com 6 moedas dispostas em círculo, começando com uma Coroa e cinco Caras. Prove que é impossível deixar todas com a face Cara.

Resolução: Associe o valor 1 às moedas mostrando Coroa e o valor 0 às moedas mostrando Cara.

Observe a soma desses valores módulo 2 (isto é, considere apenas se essa soma é par ou ímpar).

Inicialmente existe apenas uma moeda mostrando Coroa, portanto essa soma é igual a 1, ou seja, é ímpar. Em cada jogada, exatamente três moedas são viradas. Cada moeda virada altera o valor da soma em 1 (módulo 2). Como três é um número ímpar, a paridade da soma é invertida a cada jogada.

Se fosse possível chegar a uma configuração com todas as moedas mostrando Cara, a soma seria 0, que é par. Entretanto, para isso seria necessário realizar um número ímpar de jogadas.

Por outro lado, analisando as seis possíveis jogadas, observa-se que cada moeda participa exatamente de três delas. Assim, qualquer sequência de jogadas que deixe todas as moedas com a face Cara exigiria que cada moeda fosse virada um número ímpar de vezes. Isso implicaria que o número total de jogadas fosse par, o que contradiz a conclusão anterior.

Portanto, tal configuração não pode ser obtida.

Resposta: É impossível deixar as seis moedas mostrando Cara. A configuração inicial e a configuração desejada possuem propriedades incompatíveis com as regras das jogadas, gerando uma contradição.

3) Numa fita composta por 10 casas quadradas dispostas em linha reta, Júlia e Matheus jogam alternadamente. Cada um tem um fornecimento infinito de peças de dominó. Na sua vez, o jogador deve colocar um dominó na fita de modo a cobrir exatamente duas casas vazias adjacentes. Quem não conseguir colocar um dominó perde o jogo. Júlia joga primeiro.

a) Se a fita tivesse apenas 4 casas, quem venceria o jogo e qual deveria ser a primeira jogada?

b) Se a fita tivesse 5 casas, mostre como Júlia poderia garantir a vitória.

c) Voltando à fita original de 10 casas, descreva uma estratégia que garante a vitória a um dos jogadores, indicando quem vence.

a) Se a fita tivesse apenas 4 casas, quem venceria o jogo e qual deveria ser a primeira jogada?

Resolução:

Com 4 casas em linha reta, Júlia pode colocar um dominó cobrindo as duas primeiras casas:

XX□□

Agora restam duas casas vazias adjacentes. Matheus é obrigado a colocar seu dominó nelas:

XXXX

Depois disso, Júlia não possui mais nenhuma jogada possível. Portanto, Matheus vence.

Resposta: Matheus vence. A primeira jogada de Júlia deve ser colocar o dominó cobrindo duas casas consecutivas quaisquer.

b) Se a fita tivesse 5 casas, mostre como Júlia poderia garantir a vitória.

Resolução:

Com 5 casas, Júlia deve colocar o primeiro dominó no centro:

□**XX**□□

Agora restam duas partes separadas:

- uma casa vazia à esquerda;
- duas casas vazias à direita.

Matheus só consegue jogar no lado direito:

□XXXX

Depois disso, sobra apenas uma casa vazia, e Júlia não consegue colocar nenhum dominó. Essa estratégia faria Júlia perder, então essa não é uma boa jogada. Vamos analisar outra possibilidade:

Júlia deve colocar o dominó em uma das extremidades:

XX□□□

Agora restam três casas vazias em sequência. Matheus é obrigado a colocar seu dominó:

XXXX□

Sobra apenas uma casa vazia, e Júlia vence, pois Matheus foi o último a jogar e Júlia será a primeira sem jogada. Logo, Júlia deve ocupar uma extremidade.

Resposta: Júlia garante a vitória colocando o primeiro dominó em uma das extremidades da fita.

c) Voltando à fita original de 10 casas, descreva uma estratégia que garante a vitória a um dos jogadores, indicando quem vence.

Resolução:

A fita com 10 casas pode ser dividida em duas partes iguais:

□□□□ | □□□□

Júlia pode começar colocando o dominó exatamente no meio:

□□□□XX□□□□

Agora restam dois blocos separados de 4 casas. A estratégia de Júlia será sempre copiar a jogada de Matheus no bloco oposto.

Por exemplo:

- se Matheus colocar um dominó nas duas primeiras casas do bloco esquerdo, Júlia coloca nas duas primeiras casas do bloco direito;
- se Matheus jogar em qualquer outra posição, Júlia faz a jogada simétrica.

Dessa forma, após cada jogada de Matheus, Júlia sempre terá uma resposta.

Como todas as jogadas de Matheus possuem uma jogada correspondente para Júlia, será Matheus quem ficará sem movimentos primeiro.

Resposta: Júlia vence utilizando a estratégia de simetria: ela joga no centro inicialmente e copia as jogadas de Matheus no lado oposto.

4) Um tabuleiro 4×4 é preenchido com 16 fichas. Inicialmente, as duas primeiras colunas têm apenas fichas brancas e as duas últimas colunas têm apenas fichas pretas. Uma jogada permitida é escolher qualquer linha ou qualquer coluna e virar todas as 4 fichas presentes nela, invertendo suas cores.

a) Mostre uma sequência de jogadas que resulte em um tabuleiro com a primeira e a última linha todas pretas, e o resto branco.

b) É possível chegar a um estado em que o tabuleiro tenha exatamente 15 fichas de uma cor e 1 da outra? Justifique.

c) Prove que o número de fichas pretas no tabuleiro será sempre um número par.

a) Mostre uma sequência de jogadas que resulte em um tabuleiro com a primeira e a última linha todas pretas, e o resto branco.

Resolução:

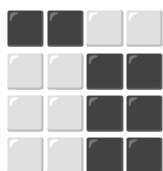
O tabuleiro inicial é:



Vamos realizar as seguintes jogadas:

1. Virar a **primeira linha**.
2. Virar a **última linha**.
3. Virar a **terceira coluna**.
4. Virar a **quarta coluna**.

Após virar a primeira linha:



Após virar a última linha:



Agora, ao inverter a terceira e a quarta colunas:



Portanto, a primeira e a última linhas ficam totalmente pretas, enquanto as linhas do meio ficam totalmente brancas.

Resposta: Uma sequência possível é: primeira linha, última linha, terceira coluna e quarta coluna.

b) É possível chegar a um estado em que o tabuleiro tenha exatamente 15 fichas de uma cor e 1 da outra? Justifique.

Resolução:

Não.

Inicialmente, o tabuleiro possui 8 fichas pretas e 8 fichas brancas. Em cada jogada, exatamente 4 fichas são viradas. Suponha que, entre essas 4 fichas, haja k fichas pretas.

Após a jogada:

- as k fichas pretas tornam-se brancas;
- as $4-k$ fichas brancas tornam-se pretas.

Assim, a quantidade de fichas pretas varia em:
 $(4-k) - k = 4 - 2k$.

Como $4 - 2k$ é sempre um número par, a paridade da quantidade de fichas pretas nunca muda.

Como o jogo começa com **8 fichas pretas**, que é um número par, sempre haverá uma quantidade par de fichas pretas.

Uma configuração com 15 fichas de uma cor e apenas 1 da outra possui 15 fichas pretas ou 15 fichas brancas. Em qualquer um dos casos, o número de fichas pretas seria ímpar (15 ou 1), o que é impossível.

Resposta: Não. Sempre haverá uma quantidade par de fichas pretas, portanto não é possível obter 15 fichas de uma cor e apenas 1 da outra.

c) Prove que o número de fichas pretas no tabuleiro será sempre um número par.

Resolução:

Inicialmente existem 8 fichas pretas, que é um número par.

Considere uma jogada qualquer.

Entre as quatro fichas escolhidas, suponha que existam k fichas pretas.

Após inverter suas cores:

- as k fichas pretas passam a ser brancas;
- as $4-k$ fichas brancas passam a ser pretas.

Logo, a variação no número de fichas pretas é

$$(4-k) - k = 4 - 2k.$$

Como $4 - 2k$ é sempre um número par, cada jogada altera o número de fichas pretas por uma quantidade par.

Assim, se antes da jogada a quantidade de fichas pretas era par, depois dela continuará sendo par.

Como inicialmente há 8 fichas pretas, concluímos que, após qualquer sequência de jogadas, o número de fichas pretas permanecerá sempre par.

Resposta: O número de fichas pretas será sempre par, pois cada jogada altera essa quantidade por um número par.

B. Álgebra

B.1 Exponenciação e Radiciação

Exponenciação

A exponenciação, ou potenciação, é uma ferramenta matemática fundamental para multiplicar um número por ele mesmo várias vezes. Além disso, esse artifício também pode ser aplicado em diversas outras áreas da matemática, como a álgebra e a geometria. De fato, os termos “ao quadrado” e “ao cubo” podem representar, respectivamente, a área de um quadrado e o volume de um cubo.

Considere a multiplicação:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Podemos abreviar essa expressão para um termo que represente todas essas multiplicações em uma notação apenas. Como o número 2 aparece 5 vezes, a expressão abreviada é chamada de potência:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

O número 5 é o **expoente** e indica quantas vezes a **base**, ou seja, o número 2, aparece como fator.

Na potência acima, lê-se “**dois elevado à quinta potência**”.

De modo geral, seja $a \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{N}$. Definimos a potência a^x como sendo o número:

$$a^x = a \cdot a \cdot a \cdots a \quad (\text{multiplicado } x \text{ vezes})$$

Exemplos: Calcule as seguintes potências:

- 3^2
- $\left(\frac{4}{3}\right)^3$
- $(-5)^3$

Resolução:

- $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
- $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$
- $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

É importante estar atento para não multiplicar o expoente diretamente pela base:

$$3^4 \neq 3 \cdot 4$$

Também é possível calcular potências negativas de números reais não nulos.

Assim, seja $a \in \mathbb{R}^*$ e $x \in \mathbb{N}$, definimos a potência a^{-x} como sendo o número:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Na definição, o asterisco na notação do conjunto dos números reais significa que a não poderá ser zero. Realmente, caso ele seja zero, na fração acima teríamos denominador zero que, como vimos anteriormente, leva a $\frac{1}{0}$ (fração não definida).

Exemplos: Calcule as seguintes potências:

- 2^{-4}
- $(\frac{5}{2})^{-3}$
- $(-\frac{4}{3})^{-2}$

Resolução

- $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{16}$
- $(\frac{5}{2})^{-3} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{8}{125}$
- $(-\frac{4}{3})^{-2} = (-\frac{3}{4})^2 = (-\frac{3}{4}) \cdot (-\frac{3}{4}) = \frac{9}{16}$

Lembre-se que o expoente negativo **não** irá mudar o sinal da expressão, mas inverterá a fração.

Propriedades da exponenciação

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{N}^*$. Temos:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^1 = a$
- Caso $a \neq 0$ então $a^0 = 1$

Exemplos: Resolva as expressões abaixo:

- $(-3)^2 \cdot (-3)^3$
- $2^2 \cdot 3^2 \cdot (\frac{3}{2})^2$
- $\frac{2^8}{2^6} \cdot 2^2$
- $(2^4)^2$

- $(\frac{2}{5})^2 \cdot (2^{10})^0 \cdot 4^{-2}$

Resolução:

- $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5 = -243$
- $2^2 \cdot 3^2 \cdot (\frac{3}{2})^2 = (2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2})^2 = (3 \cdot 3)^2 = 3^2 \cdot 3^2 = 81$
- $\frac{2^8}{2^6} \cdot 2^2 = 2^{8-6+2} = 2^4 = 16$
- $(2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 256$
- $(\frac{2}{5})^2 \cdot (2^{10})^0 \cdot 4^{-2} = \frac{2^2}{5^2} \cdot 2^{10 \cdot 0} \cdot (2^2)^{-2} = \frac{4}{25} \cdot 2^{-4} = \frac{2^2 \cdot 2^{-4}}{25} = \frac{2^{-2}}{25} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{100}$

Naturalmente, tem-se de imediato que essas propriedades também valem para as potências negativas.

Perceba, caro leitor, que as potências de base negativas possuem dois importantes detalhes a se observar. Primeiramente, quando a base negativa é elevada a um expoente par, o resultado é positivo. Agora, quando a base negativa é elevada a um expoente ímpar, o resultado é negativo.

Essa observação nos fornece um resultado interessante: um número real elevado a uma potência par nunca será negativo. Os casos em que uma potência par resulta em um número negativo não estarão em nosso contexto de estudo.

Radiciação

De certo modo, a radiciação pode representar a operação inversa da potenciação. A radiciação é uma ferramenta que irá buscar a base de uma potência quando já conhecemos o resultado e o expoente.

Nesse sentido, sejam $a \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{N}^*$, definimos o número $a^{\frac{1}{x}}$ como sendo o número:

$$a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a} \rightarrow (\sqrt[x]{a})^x = a$$

Caso a seja um número não negativo e o expoente x um número par, $a^{\frac{1}{x}}$ é um número não negativo. Por outro lado, caso a seja um número real (inclusive um termo negativo) e o expoente x um número ímpar, $a^{\frac{1}{x}}$ é um número real que poderá ser negativo ou não.

Para o número $\sqrt[x]{a}$, lê-se raiz x -ésima de a . Se $x = 2$, escreve-se apenas $\sqrt{a}$.

Exemplos: Resolva as raízes abaixo

- $\sqrt{4}$
- $\sqrt[3]{(-\frac{64}{27})}$

Resolução:

- Como $2^2 = 4$, temos que $\sqrt{4} = 2$
- Como $(-\frac{4}{3})^3 = (-\frac{64}{27})$, temos que $\sqrt[3]{(-\frac{64}{27})} = (-\frac{4}{3})$

Talvez o leitor faça a seguinte pergunta para si mesmo: “se $(-2)^2 = 4$, então $\sqrt{4} = -2$?”. A resposta breve para essa pergunta: **não**. De maneira mais detalhada, definimos a $\sqrt{4}$ como um número não negativo, ou seja, o próprio número 2. Queremos, com essa limitação, interpretar a raiz como uma função!

Os números que podem ser escritos como o quadrado de um número natural são chamados de **quadrados perfeitos**. Por exemplo: $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ e etc.

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. Caso exista, podemos definir o número real $a^{\frac{x}{y}}$ como sendo:

$$\sqrt[y]{a^x} = (\sqrt[y]{a})^x$$

Exemplos: Resolva as expressões abaixo:

- $(\frac{1}{27})^{\frac{2}{3}}$
- $49^{\frac{3}{2}}$

Resolução:

- $(\frac{1}{27})^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{\frac{1}{27}})^2 = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$
- $49^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{49})^3 = 7^3 = 343$

Propriedades da radiciação

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{Z}^*$. Temos:

- $\sqrt[x]{ab} = \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b}$ (para índice par, $a \geq 0$ e $b \geq 0$)
- $\sqrt[x]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}}$ (para índice par, $a \geq 0$ e $b \geq 0$)
- $(\sqrt[x]{a})^x = a$
- $\sqrt[x]{a^x} = a$ se x é ímpar ou $\sqrt[x]{a^x} = |a|$ se x é par
- $\sqrt[y]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[xy]{a}$
- $\sqrt[x]{a^x b} = a \sqrt[x]{b}$ se x é ímpar ou $\sqrt[x]{a^x b} = |a| \sqrt[x]{b}$ se x é par

Por último, é importante manter a atenção para o seguinte caso:

$$\sqrt[x]{a+b} \neq \sqrt[x]{a} + \sqrt[x]{b}$$

$$\sqrt[x]{a - b} \neq \sqrt[x]{a} - \sqrt[x]{b}$$

As propriedades de separação só valem para o caso da **multiplicação** e da **divisão**.

Exemplos: Resolva as raízes abaixo:

- $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$
- $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$
- $\sqrt[6]{(-3)^6}$
- $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$
- $\sqrt{(-6)^2 \cdot 5}$

Resolução:

- $\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6$
- $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$
- $\sqrt[6]{(-3)^6} = |-3| = 3$
- $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3 \cdot 2]{729} = \sqrt[6]{729} = 3$
- $\sqrt{(-6)^2 \cdot 5} = |-6| \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

Exercícios de fixação

Calcule ou simplifique as expressões abaixo:

1) $\frac{2^5 \cdot 2^7}{2^8}$	2) $\frac{3^4 \cdot 9^3}{27^2}$	3) $\frac{(5^2)^4}{25^3}$	4) $\frac{(-2)^9 \cdot (-2)^4}{(-2)^{10}}$	5) $\frac{(-3)^8}{(-3)^5}$	6) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$
7) $\left(\frac{5}{2}\right)^4 \div \left(\frac{25}{4}\right)$	8) $\frac{(2^3 \cdot 5^3)^2}{10^5}$	9) $\frac{4^2 \cdot 8^3}{2^9}$	10) $\frac{(9^2)^3}{3^5 \cdot 27}$	11) $\frac{(2^4)^3 \cdot 4^2}{8^4}$	12) $\frac{(3^3)^4}{9^5}$
13) $\left(\frac{2^3 \cdot 3^2}{6^2}\right)^3$	14) $\frac{16^3 \cdot 8^2}{4^5 \cdot 2^3}$	15) $\frac{10^8 \cdot 10^3}{(10^2)^4}$	16) $\frac{(7^0 + 3^1)^4}{2^6}$	17) $\frac{2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6}{2^5}$	18) $\frac{3^7 - 3^6}{2 \cdot 3^5}$

1) $\sqrt{432}$	2) $\sqrt[3]{-686}$	3) $\sqrt{\frac{225}{64}}$	4) $\sqrt[3]{\frac{-512}{3375}}$	5) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$	6) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$
-----------------	---------------------	----------------------------	----------------------------------	--------------------------------	--------------------------------------

7) $(\sqrt[4]{81})^4$	8) $(\sqrt[3]{\frac{7}{2}})^3$	9) $\sqrt{(-11)^2}$	10) $\sqrt[3]{(-5)^3}$	11) $\sqrt{\sqrt[3]{4096}}$	12) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$
13) $\sqrt[6]{64^2}$	14) $\sqrt[4]{\frac{2^{10} \cdot 3^9}{5^4}}$	15) $\sqrt{5400}$	16) $\sqrt[3]{3456}$	17) $81^{\frac{3}{4}}$	18) $(\frac{64}{125})^{\frac{2}{3}}$

B.2 Produtos Notáveis

O que são produtos notáveis?

Ao longo do estudo da álgebra, talvez o próprio leitor tenha percebido que muitos produtos se repetem e que o processo de multiplicação distributiva pode parecer repetitivo e ineficiente. Por isso, algumas identidades clássicas, extremamente úteis, destacam-se por serem comuns e aparecem em muitos problemas matemáticos. Chamamos essas identidades de produtos notáveis.

Quadrado de uma soma

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo termo.

Essa relação também pode ser manipulada para criar outras expressões que comumente podem aparecer nos exercícios. Por exemplo:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$$

Assim, a soma dos quadrados equivale ao quadrado da soma menos duas vezes a soma dos produtos.

Exemplos: Resolva os produtos notáveis abaixo:

- $(3x + y)^2$
- $(\frac{3a}{2} + b^2)^2$
- $(8f + 2g)^2$

Resolução:

- $(3x + y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$
- $(\frac{3a}{2} + b^2)^2 = (\frac{3a}{2})^2 + 2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot b^2 + (b^2)^2 = \frac{9a^2}{4} + 3ab^2 + b^4$

- $(8f + 2g)^2 = (8f)^2 + 2 \cdot 8f \cdot 2g + (2g)^2 = 64f^2 + 32fg + 4g^2$

Quadrado de uma diferença

$$(a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo termo.

O fato de ter um sinal negativo no meio nem sempre irá significar que o produto notável terá o formato acima. Por isso, o sinal de positivo ou negativo do primeiro termo também pode afetar a expressão. De fato:

$$(-x - y)^2 = [-(x + y)]^2 = (-1)^2 \cdot (x + y)^2 = (x + y)^2$$

Exemplos: Resolva os produtos notáveis abaixo:

- $(x - 5y)^2$
- $\left(\frac{a}{2} - \frac{2b^3}{3}\right)^2$
- $(-7 + 3x^2)^2$

Resolução:

- $(x - 5y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5y + (5y)^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$
- $\left(\frac{a}{2} - \frac{2b^3}{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2b^3}{3} + \left(\frac{2b^3}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{2ab^3}{3} + \frac{4b^6}{9}$
- $(-7 + 3x^2)^2 = (3x^2 - 7)^2 = (3x^2)^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot 7 + 7^2 = 9x^4 - 42x^2 + 49$

Produto da soma pela diferença

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

O produto da soma de dois termos pela diferença entre eles é igual ao quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo.

Exemplos: Resolva os produtos notáveis abaixo:

- $(2x + 3)(2x - 3)$
- $\left(\frac{a^3b}{3} - \frac{1}{a^4}\right)\left(\frac{a^3b}{3} + \frac{1}{a^4}\right)$
- $\left(\frac{p}{5} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{p}{5} - \frac{1}{4}\right)$

Resolução:

- $(2x + 3)(2x - 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$
- $(\frac{a^3b}{3} - \frac{1}{a^4})(\frac{a^3b}{3} + \frac{1}{a^4}) = (\frac{a^3b}{3})^2 - (\frac{1}{a^4})^2 = \frac{a^6b^2}{9} - \frac{1}{a^8}$
- $(\frac{p}{5} + \frac{1}{4})(\frac{p}{5} - \frac{1}{4}) = (\frac{p}{5})^2 - (\frac{1}{4})^2 = \frac{p^2}{25} - \frac{1}{16}$

Produto de Stevin

A última identidade que iremos destacar é o produto de Stevin. Esse produto possui grande relação com equações do 2º grau e conhecê-lo pode se tornar uma ferramenta poderosa em diversos exercícios.

Definimos ele da seguinte maneira: o produto de dois binômios cujos primeiros termos são iguais e os segundos termos desiguais, é igual a um trinômio completo do 2º grau em que o coeficiente do primeiro termo é a unidade, o coeficiente do segundo termo é a soma algébrica dos termos desiguais e o terceiro termo é o produto dos termos desiguais. Matematicamente:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + xa + xb + ab$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Exemplos:

- $(x + 2)(x + 3)$
- $(p + 7)(p - 1)$
- $(a - 12)(a + 2)$

Resolução:

- $(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6$
- $(p + 7)(p - 1) = p^2 + (7 - 1)p + 7 \cdot (-1) = p^2 + 6p - 7$
- $(a - 12)(a + 2) = a^2 + (-12 + 2)a + (-12) \cdot 2 = a^2 - 10a - 24$

Exercícios de fixação

Desenvolva os produtos notáveis abaixo e reduza os termos semelhantes:

- **Quadrado da soma**

1) $(x + 7)^2$	2) $(2a + 5)^2$	3) $(3x + 4y)^2$
4) $(5m^2 + 2n)^2$	5) $(2a^3 + 3b^2)^2$	6) $(\frac{x}{2} + 3y)^2$

7) $\left(\frac{2p}{3} + \frac{5q}{4}\right)^2$	8) $(\sqrt{2}x + 3y)^2$	9) $(\sqrt{3}a + \sqrt{5}b)^2$
10) $(4x^2 + 3y^2)^2$	11) $(a^2b + 2c)^2$	12) $(3m^3 + 2n^4)^2$
13) $\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{3y}{5}\right)^2$	14) $\left(\frac{a^3}{2} + \frac{4b^2}{3}\right)^2$	15) $(5\sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y)^2$
16) $(2a^2b + 3c^2)^2$	17) $\left(\frac{x^3}{2} + \frac{3y^2}{4}\right)^2$	18) $\left(\frac{3a^4}{5} + \frac{5b^3}{6}\right)^2$

● **Quadrado da diferença**

1) $(x - 6)^2$	2) $(3a - 4)^2$	3) $(5x - 2y)^2$
4) $(4m^2 - 3n)^2$	5) $(3a^3 - 2b^2)^2$	6) $\left(\frac{x}{3} - 2y\right)^2$
7) $\left(\frac{5p}{4} - \frac{2q}{3}\right)^2$	8) $(\sqrt{3}x - 2y)^2$	9) $(\sqrt{5}a - \sqrt{2}b)^2$
10) $(5x^2 - 2y^2)^2$	11) $(2a^2b - 3c)^2$	12) $(4m^3 - n^4)^2$
13) $\left(\frac{3x^2}{5} - \frac{2y}{7}\right)^2$	14) $\left(\frac{2a^3}{3} - \frac{5b^2}{4}\right)^2$	15) $(4\sqrt{5}x - 3\sqrt{2}y)^2$
16) $(3a^2b - 2c^2)^2$	17) $\left(\frac{5x^3}{6} - \frac{7y^2}{8}\right)^2$	18) $\left(\frac{2a^4}{7} - \frac{3b^3}{5}\right)^2$

● **Diferença de quadrados**

1) $(x + 9)(x - 9)$	2) $(2a + 5)(2a - 5)$	3) $(3x + 4y)(3x - 4y)$
4) $(5m^2 + 2n)(5m^2 - 2n)$	5) $(2a^3 + 3b^2)(2a^3 - 3b^2)$	6) $\left(\frac{x}{2} + 3y\right)\left(\frac{x}{2} - 3y\right)$
7) $\left(\frac{2p}{3} + \frac{5q}{4}\right)\left(\frac{2p}{3} - \frac{5q}{4}\right)$	8) $(\sqrt{2}x + 3y)(\sqrt{2}x - 3y)$	9) $(\sqrt{3}a + \sqrt{5}b)(\sqrt{3}a - \sqrt{5}b)$

10) $(4x^2 + 3y)(4x^2 - 3y)$	11) $(a^2b + 2c)(a^2b - 2c)$	12) $(3m^3 + 2n^2)(3m^3 - 2n^2)$
13) $\left(\frac{2x^2}{3} + y\right)\left(\frac{2x^2}{3} - y\right)$	14) $\left(\frac{a^3}{2} + \frac{2b}{3}\right)\left(\frac{a^3}{2} - \frac{2b}{3}\right)$	15) $(5\sqrt{2}x + 2y)(5\sqrt{2}x - 2y)$
16) $(2a^2b + 3c)(2a^2b - 3c)$	17) $\left(\frac{x^3}{2} + \frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3y}{4}\right)$	18) $\left(\frac{3a^2}{5} + \frac{5b}{6}\right)\left(\frac{3a^2}{5} - \frac{5b}{6}\right)$

● **Produto de Stevin**

1) $(x + 3)(x + 8)$	2) $(x - 4)(x + 7)$	3) $(x - 5)(x - 9)$
4) $(2x + 3)(2x + 5)$	5) $(3a - 2)(3a + 7)$	6) $(4m + 5n)(4m + 2n)$
7) $(2x^2 + 3)(2x^2 + 7)$	8) $(3a^2 - 5b)(3a^2 + 2b)$	9) $(5xy + 2z)(5xy - 3z)$
10) $\left(\frac{x}{2} + 3\right)\left(\frac{x}{2} - 5\right)$	11) $\left(\frac{2p}{3} + q\right)\left(\frac{2p}{3} - 2q\right)$	12) $(\sqrt{2}x + 3)(\sqrt{2}x - 4)$
13) $(\sqrt{2}x + 3)(\sqrt{2}x - 4)$	14) $(4x^2 + 3y)(4x^2 - 5y)$	15) $(a^2b + 2c)(a^2b + 5c)$
16) $(3m^3 - 2n^2)(3m^3 - 7n^2)$	17) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{2y}{5}\right)$	18) $\left(\frac{5a^3}{2} + 2b\right)\left(\frac{5a^3}{2} - 7b\right)$

B.3 Sistemas de Equação

Sistemas Lineares

Sistemas lineares são conjuntos de equações que envolvem incógnitas que relacionam-se de maneira linear. Por isso, as variáveis aparecem multiplicadas por números, somadas ou subtraídas entre si, sem que haja potências e raízes.

Considere o exemplo abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 19 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Queremos descobrir um valor de x e de y que satisfaça as duas equações lineares acima **ao mesmo tempo**. Os valores que tornam verdadeiras as duas expressões são chamados de **soluções do sistema**. Um sistema poderá ter apenas mais de uma solução ou,

por vezes, nenhum valor que o satisfaz, mas nesse material trataremos apenas de sistemas com **uma** solução.

A princípio, vamos somar as duas equações:

$$(2x + y) + (x - y) = 19 + 2$$

$$3x = 21 \rightarrow x = 7$$

Para descobrir o valor de y , basta substituir o valor de x descoberto em alguma das duas equações do sistema. Por convenção, substituiremos na primeira:

$$2 \cdot 7 + y = 19$$

$$y = 19 - 14 \rightarrow y = 5$$

Portanto, o conjunto solução do sistema de equações acima é $(7, 5)$.

Métodos comuns para resolver sistemas lineares

Existem diversas maneiras de resolver um sistema linear. No exemplo anterior, resolvemos o problema com um método chamado método da adição. Por isso, existem várias formas diferentes de resolver uma mesma situação, cabendo ao leitor escolher o método que lhe parecer mais conveniente.

Método da adição

Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 32 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

Primeiramente, busca-se descobrir o valor de x . Para isso, iremos multiplicar a segunda equação por 2 e somar o resultado à primeira expressão.

$$2 \cdot (3x - y) = 2 \cdot 11$$

$$6x - 2y = 22$$

$$3x + 2y + 6x - 2y = 22 + 32$$

$$9x = 54 \rightarrow x = 6$$

Perceba, caro leitor, que ao multiplicar a segunda equação por 2, conseguimos eliminar a incógnita y ao somar as duas equações. Essa estratégia facilita a resolução de sistemas de equação ao permitir que possamos eliminar uma das variáveis.

Agora, para descobrir o valor de y , basta substituir x em alguma das equações acima:

$$3 \cdot 6 + 2y = 32$$

$$2y = 32 - 18 = 14$$

$$y = 7$$

Portanto, o conjunto solução do sistema de equações acima é $(6, 7)$.

É importante salientar que não necessariamente precisamos primeiro descobrir o valor da variável x . Conseguimos resolver o sistema normalmente optando começar pela variável y (verifique!).

Com base na resolução acima, podemos inferir que o método da adição consiste em somar ou subtrair as equações do sistema a fim de descobrir uma das variáveis separadamente.

Exemplo: Resolva o sistema abaixo pelo método da adição:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases}$$

Resolução:

Primeiramente, vamos resolver para a variável x . Multiplicando a primeira equação por 2, a segunda por 3 e somando o resultado dos produtos, iremos conseguir eliminar a variável y . Temos, então:

$$2 \cdot (2x + 3y) = 2 \cdot 18 \rightarrow 4x + 6y = 36$$

$$3 \cdot (5x - 2y) = 3 \cdot 11 \rightarrow 15x - 6y = 33$$

$$(4x + 6y) + (15x - 6y) = 36 + 33$$

$$19x = 69 \rightarrow x = \frac{69}{19}$$

Substituindo o valor de x na primeira expressão, obtemos:

$$2 \cdot \frac{69}{19} + 3y = 18$$

$$3y = 18 - \frac{138}{19} = \frac{209}{19} - \frac{138}{19} = \frac{171}{19}$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{171}{19} = \frac{57}{19} \rightarrow y = 3$$

Portanto, o conjunto solução do sistema de equações acima é $(\frac{69}{19}, 3)$.

Esse sistema possui uma solução fracionária, o que é totalmente possível.

Método da substituição:

Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Vamos isolar o y na primeira equação, fazendo com que y dependa de x :

$$x + y = 5 \rightarrow y = 5 - x$$

Substituindo a expressão resultante na segunda equação e resolvendo para y , temos:

$$2 \cdot (5 - x) - y = 1$$

$$10 - 2y - y = 1$$

$$3y = 9 \rightarrow y = 3$$

Agora, descoberto o valor de y , podemos descobrir o valor de x :

$$x + 3 = 5 \rightarrow x = 2$$

Tendo em vista a resolução acima, percebe-se que o método da substituição consiste em isolar uma das incógnitas em uma equação e substituir a expressão obtida na outra, transformando o sistema em uma única equação com apenas uma variável.

O método da substituição costuma ser conveniente quando uma incógnita já está isolada ou possui coeficiente 1 ou -1 .

Exemplo: Resolva o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$$

Resolução:

Na primeira equação, iremos isolar a variável x e substituir a expressão obtida na segunda equação:

$$x - y = 4 \rightarrow x = 4 + y$$

$$2 \cdot (4 + y) + 3y = 23$$

$$8 + 5y = 23$$

$$5y = 15 \rightarrow y = 3$$

Por conseguinte, substituindo o valor de y na primeira equação:

$$x - 3 = 4 \rightarrow x = 7$$

Portanto, o conjunto solução do sistema de equações acima é $(7, 3)$.

Exercícios contextualizados

Sistemas lineares normalmente são cobrados em questões contextualizadas em que o aluno terá de interpretar as informações do enunciado a fim de montar um sistema que resolva o problema proposto. A seguir estão alguns exercícios resolvidos para que o leitor, em conjunto com o conhecimento da teoria, possa estudar algumas maneiras de resolver questões que envolvam sistemas de equações.

Questão 1: Melissa e Antônia ficaram responsáveis pela venda de pulseiras em uma feira cultural. A pulseira simples custava R\$8,00, enquanto a pulseira completa custava R\$13,00 e permitia participar de todas as oficinas. Ao final do primeiro dia, elas haviam vendido 36 pulseiras e arrecadado R\$368,00.

a) Representando por x a quantidade de pulseiras simples e por y a quantidade de pulseiras completas, escreva um sistema de equações que represente a situação.

b) Quantas pulseiras de cada tipo foram vendidas?

c) No segundo dia, foram vendidas novamente 36 pulseiras, mas a quantidade de pulseiras completas foi 4 unidades maior que no primeiro dia. Qual foi a arrecadação do segundo dia?

Resolução:

a) Sendo x a quantidade de pulseiras simples e y a quantidade de pulseiras completas, nota-se que, de acordo com enunciado, as 36 pulseiras vendidas representam a soma das quantidades x e y de pulseiras simples e completas, respectivamente. Por isso:

$$x + y = 36$$

Como a pulseira simples custava R\$8,00, o total arrecadado com a venda de x pulseiras simples é igual à $8 \cdot x$. Semelhantemente, como a pulseira completa custava R\$13,00, o valor obtido pela venda de y pulseiras completas é igual à $13 \cdot y$. Logo, o dinheiro total obtido ao final do dia é representado por:

$$8x + 13y = 368$$

Por fim, podemos juntar as duas equações em um sistema linear com as variáveis x e y :

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ 8x + 13y = 368 \end{cases}$$

b) Para descobrir a quantidade de pulseiras vendidas, de cada tipo, basta resolver o sistema de equações que montamos na letra anterior.

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ 8x + 13y = 368 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -8 e somando à segunda, temos:

$$\begin{aligned} (-8) \cdot (x + y) &= (-8) \cdot 36 \\ -8x - 8y &= -288 \\ (8x + 13y) + (-8x - 8y) &= 368 - 288 \\ 5y &= 80 \quad \rightarrow \quad y = 16 \end{aligned}$$

Substituindo y na primeira equação:

$$x + 16 = 36 \quad \rightarrow \quad x = 20$$

Portanto, foram vendidas 20 pulseiras simples e 16 pulseiras completas.

c) Se foram vendidas 36 pulseiras, mas 4 pulseiras completas a mais, então foram vendidas 20 pulseiras completas e 16 pulseiras simples. O total arrecadado por essa venda foi de:

$$20 \cdot 13 + 16 \cdot 8 = 388 \text{ reais}$$

Questão 2: Pedro participou de um torneio de robótica com 18 rodadas. Em cada rodada, ele poderia obter:

- 3 pontos por vitória;
- 1 ponto por empate;
- 0 ponto por derrota

Ao final do torneio, Pedro somou 30 pontos e percebeu que o número de vitórias foi igual ao dobro do número de derrotas.

Determine quantas vitórias, empates e derrotas Pedro teve.

Resolução:

Chamaremos de V o número de vitórias, D o número de derrotas e E o número de empates.

No total foram disputadas 18 rodadas, logo, a soma do número de vitórias, derrotas e empates irá ser igual ao número de partidas:

$$V + D + E = 18$$

Como a pontuação total foi de 30 pontos e a derrota não contribui com ponto algum, temos que:

$$3V + E = 30$$

Por último, de acordo com o enunciado, o número de vitórias foi o dobro do número de derrotas. Assim, temos a seguinte relação:

$$V = 2D$$

Com isso, conseguimos montar um sistema de equações com as expressões obtidas:

$$\begin{cases} V + D + E = 18 \\ 3V + E = 30 \\ V = 2D \end{cases}$$

Podemos substituir o valor de V na primeira e na segunda equação a fim de obter um sistema linear com apenas duas variáveis:

$$\begin{cases} 3D + E = 18 \\ 6D + E = 30 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação pela primeira:

$$(6D + E) - (3D + E) = 30 - 18$$

$$3D = 12 \rightarrow D = 4$$

$$3 \cdot 4 + E = 18$$

$$E = 18 - 12 = 6$$

Por fim, substituindo o valor de E e de D na primeira equação do sistema inicial, iremos obter o número de vitórias V :

$$V + 4 + 6 = 18 \rightarrow V = 8$$

Portanto, Pedro teve 8 vitórias, 6 empates e 4 derrotas.

Questão 3: Para uma campanha de doação, Lucca montou três tipos de kits escolares.

Kit	Cadernos	Lápis	Régua
A	2	3	1
B	3	1	2
C	1	4	2

Ao todo, foram utilizados 26 cadernos, 29 lápis e 20 régua. Todos os materiais foram utilizados, sem sobras.

Quantos kits de cada tipo foram montados por Lucca?

Resolução:

Sejam a , b e c as quantidades de kits de cada tipo. Podemos montar equações para a cada quantidade de material doado e, por fim, montar um sistema linear que nos ajude a resolver o problema.

Foram utilizados 26 cadernos no total. Desse modo:

$$2a + 3b + c = 26$$

Foram utilizados 29 lápis no total. Logo:

$$3a + b + 4c = 29$$

Foram utilizadas 20 réguas no total. Assim:

$$a + 2b + 2c = 20$$

Montando o sistema com as três equações, temos:

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 26 \\ 3a + b + 4c = 29 \\ a + 2b + 2c = 20 \end{cases}$$

Isolando a na última equação e substituindo nas outras duas, podemos montar um sistema linear com apenas duas variáveis, semelhante ao problema anterior, o que facilita a resolução do problema.

$$a = 20 - 2b - 2c$$

$$2 \cdot (20 - 2b - 2c) + 3b + c = 26$$

$$40 - b - 3c = 26$$

$$b + 3c = 14$$

$$3 \cdot (20 - 2b - 2c) + b + 4c = 29$$

$$- 5b - 2c + 60 = 29$$

$$5b + 2c = 31$$

Temos, então:

$$\begin{cases} b + 3c = 14 \\ 5b + 2c = 31 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 2, a segunda equação por 3 e subtraindo os produtos, obtemos:

$$2 \cdot (b + 3c) - 3 \cdot (5b + 2c) = 14 \cdot 2 - 31 \cdot 3$$

$$- 13b = - 65$$

$$b = 5$$

$$5 + 3c = 14$$

$$3c = 9 \rightarrow c = 3$$

Substituindo os valores de b e c na terceira equação do sistema original, conseguimos, portanto:

$$a + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 20$$

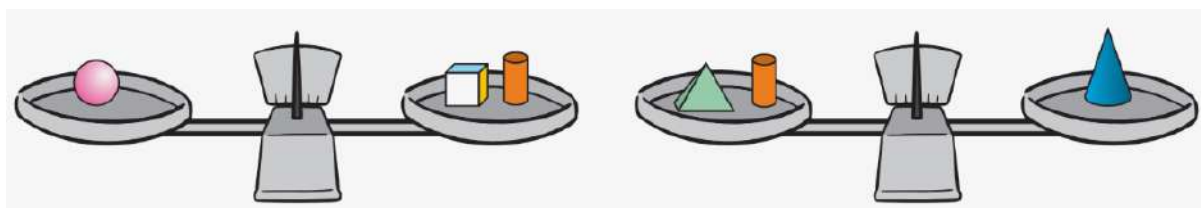
$$a = 4$$

Enfim, podemos afirmar que Lucca vendeu 4 kits do tipo A, 5 kits do tipo B e 3 kits do tipo C.

Exercícios propostos

Resolva as questões abaixo:

(OBMEP 2º fase 2019 - Nível 2) Paulinho tem peças com cinco formas diferentes (cubos, pirâmides, esferas, cilindros e cones). Peças com a mesma forma têm o mesmo peso (massa). Ele coloca algumas peças numa balança de pratos e observa o equilíbrio nas duas situações abaixo.



a) Indique se as figuras abaixo representam situações certas ou erradas.



- ☐ certa
☐ errada



- ☐ certa
☐ errada

b) Qual das figuras abaixo representa a situação correta?



Figura A



Figura B

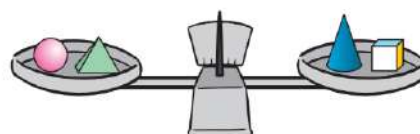
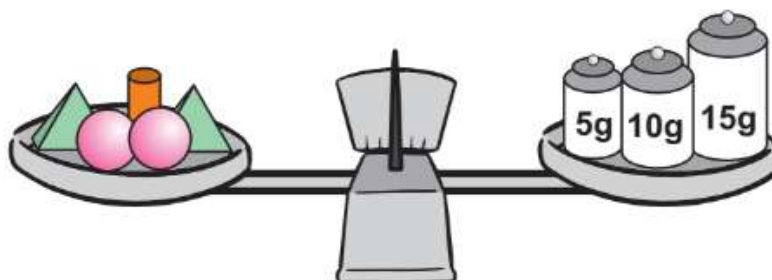


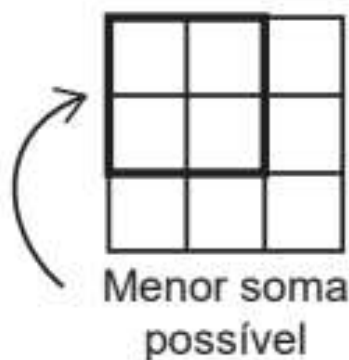
Figura C

c) Com alguns pesos conhecidos, Paulinho observou a situação de equilíbrio abaixo. Quanto pesam, juntos, um cubo, uma pirâmide, uma esfera, um cilindro e um cone?

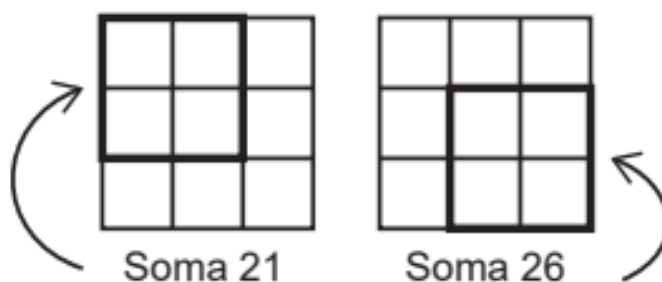


(OBMEP 2º fase 2022 - Nível 2) Marco preenche quadriculados 3×3 com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, sem repetir nenhum deles.

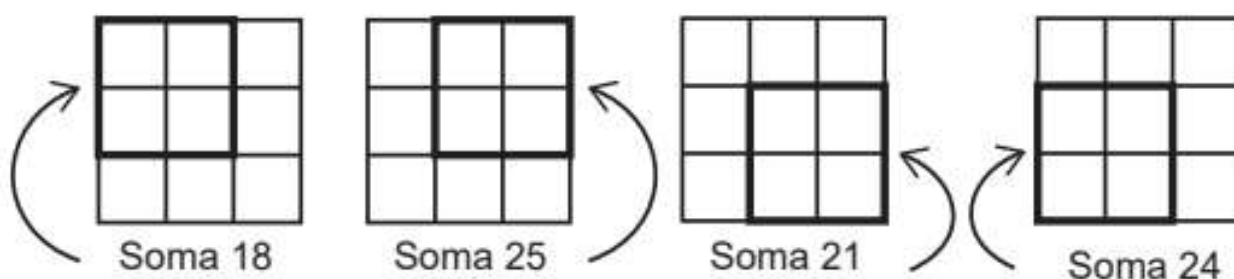
a) Marco preencheu um quadriculado de forma que os quatro números escritos no quadrado 2×2 destacado têm a menor soma possível. Qual é a soma dos cinco números escritos fora desse quadrado?



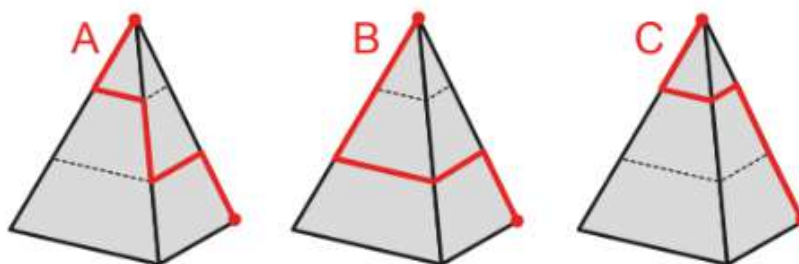
b) Marco conseguiu preencher outro quadriculado de modo que a soma dos números escritos em um dos quadrados 2×2 destacados é 21 e, no outro, 26. As duas figuras abaixo são representações desse mesmo quadriculado. Qual é o menor número que Marco pode ter escrito na casa central do quadriculado?



c) Marco conseguiu preencher um terceiro quadriculado de modo que as somas dos números escritos nos quatro quadrados 2×2 destacados são 18, 25, 21 e 24. Além disso, a soma dos números escritos nos quatro cantos do quadriculado 3×3 é 16. As quatro figuras abaixo são representações desse mesmo quadriculado. Qual foi o número que Marco escreveu na casa central?



(OBMEP 1º fase 2024 - Nível 2) Na figura observamos três caminhos A, B e C, destacados em vermelho. Eles ligam o topo de uma pirâmide regular de base quadrada a um vértice em sua base, passando por arestas e trechos paralelos à base.



Se a distância percorrida no caminho A é a , no caminho B é b e no caminho C é c , qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- a) $a = b = c$
- b) $c < b < a$
- c) $a < b < c$

d) $a < c < b$

e) $c < a < b$

(Portal da Matemática OBMEP) Resolva o sistema linear:

Dica: Busque por uma solução geral.

$$\begin{cases} x + y + z + w = 7 \\ z + w = 5 \end{cases}$$

B.4 Exercícios complementares

Questão 1. Melissa possuía uma caixa com certa quantidade de fichas. Inicialmente, ela entregou a Antônio a quarta parte das fichas que possuía, mais 6 fichas.

Em seguida, considerando apenas as fichas que restaram, Melissa entregou a Gabriel a terça parte dessa quantidade, mais 4 fichas.

Por fim, Melissa dividiu igualmente todas as 30 fichas restantes entre Pedro e Arthur.

a) Quantas fichas Melissa possuía imediatamente antes de fazer a entrega a Gabriel?

b) Quantas fichas havia inicialmente na caixa? Quantas fichas Antônio e Gabriel receberam?

c) Em outro dia, Melissa começou com 80 fichas. Ela entregou primeiro a quarta parte de suas fichas, mais k fichas, e depois entregou a terça parte do que restou, mais k fichas. Sabendo que novamente restaram 30 fichas, determine k .

Questão 2. Arthur construiu um painel quadrado formado por $2^{10} \cdot 3^4$ pequenas lâmpadas quadradas, dispostas em linhas e colunas, sem espaços entre elas.

a) Quantas lâmpadas há em cada lado do painel?

b) Arthur retirou do centro do painel uma região quadrada formada por $2^8 \cdot 3^2$ lâmpadas. A região retirada está centralizada e seus lados são paralelos aos lados do painel original. Determine o número de lâmpadas de cada lado da região retirada, a largura da moldura que permaneceu e a quantidade de lâmpadas que permaneceram no painel.

c) As lâmpadas da moldura foram destacadas e reorganizadas em módulos quadrados idênticos, todos com lado inteiro e sem que sobrasse nenhuma lâmpada. Qual é o maior lado possível para cada módulo? Quantos módulos foram construídos?

Questão 3. Uma praça tem a forma de um quadrado de lado $x + 5$ metros. Em seu interior foi construído um palco retangular, com lados medindo $x + 1$ metros e $x - 1$ metros.

A área da praça que não é ocupada pelo palco é igual a 196 m^2 .

a) Utilizando produtos notáveis, mostre que a área não ocupada pelo palco pode ser representada por $10x + 26$.

b) Determine o valor de x , o lado da praça e as dimensões do palco.

c) Posteriormente, foi construída uma faixa de largura uniforme t ao redor da parte externa da praça. Essa faixa aumentou a área total em 92 m^2 . Determine a largura t da faixa.

Questão 4. Melissa e André foram os encarregados de montar o cenário de uma apresentação. Trabalhando sozinha, Melissa levaria certo número de horas para concluir todo o cenário. André, trabalhando sozinho, levaria 5 horas a mais que Melissa.

Quando os dois trabalham juntos, mantendo sempre o mesmo ritmo, concluem o cenário em 6 horas.

a) Representando por x o número de horas que Melissa levaria trabalhando sozinha, escreva o tempo que André levaria sozinho, a parte do cenário que cada um monta em uma hora e uma equação que representa o trabalho realizado pelos dois em uma hora.

b) Determine quanto tempo Melissa e André levariam, separadamente, para montar todo o cenário.

c) Em outro cenário de mesmo tamanho, André trabalhou sozinho durante 3 horas. Depois disso, Melissa passou a trabalhar com ele, e os dois continuaram juntos até terminar. Quanto tempo decorreu desde o início do trabalho até a conclusão do cenário?

Questão 5. Para uma feira de matemática, Antônia organizou três tipos de kits, conforme a tabela a seguir:

Kit	Cadernos	Canetas	Réguas
A	1	2	0
B	2	1	0
C	1	1	1

Ao todo, foram montados 40 kits, utilizando 55 cadernos e 57 canetas.

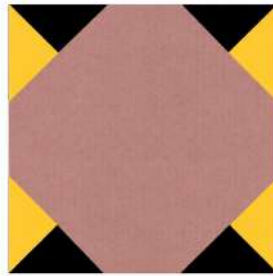
- a) Se x , y e z representam, respectivamente, as quantidades de kits dos tipos A, B e C, escreva um sistema de equações que representa a situação.
- b) Determine a quantidade de kits de cada tipo e a quantidade de réguas utilizadas.
- c) Depois da feira, todos os kits foram abertos e as réguas foram guardadas. Com os cadernos e as canetas, Antônia deseja montar apenas kits dos tipos A e B, com a condição de que sejam montadas quantidades iguais dos dois tipos. Alguns cadernos e algumas canetas poderão ser separados, mas Antônia deseja separar o menor número total possível de objetos. Quantos cadernos e quantas canetas devem ser separados? Quantos kits de cada tipo serão montados?

C. Geometria

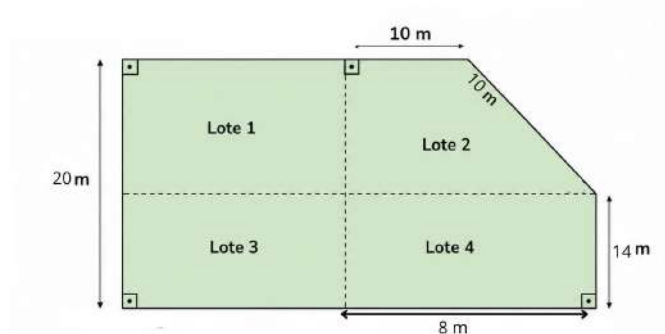
C.1 Dividir para conquistar

A ideia de "dividir para conquistar" em problemas de área é transformar uma figura complicada em partes simples e iguais (normalmente triângulos, quadrados ou retângulos). Assim, em vez de calcular medidas difíceis, você trabalha com frações da área total.

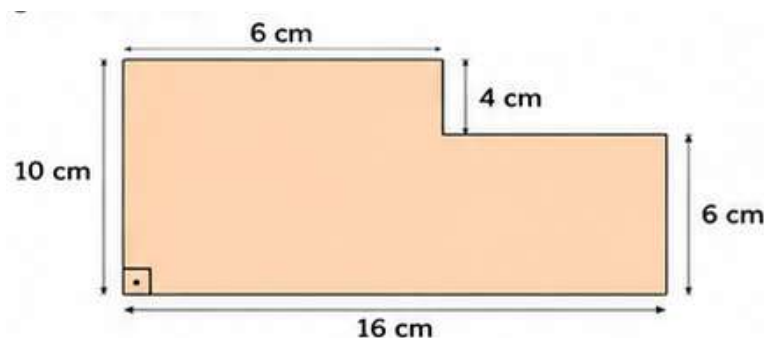
- 1) Um quadrado vermelho tem lado 4 cm. Sobre cada lado do quadrado é construído um triângulo isósceles retângulo, com $\frac{1}{4}$ da medida do lado. Cada triângulo é dividido ao meio pela altura relativa à hipotenusa. A região amarela é formada por uma das metades de cada triângulo. Qual é a área total amarela?



- 2) A figura abaixo representa um terreno com formato de um polígono. Ele será dividido em quatro lotes, todos com a mesma área, traçando-se segmentos de reta conforme indicado na figura. Qual a área de cada lote?



- 3) A figura abaixo representa um polígono. Ele será dividido em duas partes de mesma área usando apenas um segmento de reta. Trace esse segmento e indique a área de cada parte.



- 4) Considere um quadrado de lado **30 cm**.

Ligando os pontos médios dos lados forma-se outro quadrado.

Ligando os pontos médios desse novo quadrado forma-se outro, e assim sucessivamente.

Determine:

a) a área do segundo quadrado;

b) a área do terceiro;

Gabarito:

1) Se o lado do quadrado vermelho mede 4 cm, cada lado do triângulo isósceles mede 1 cm.

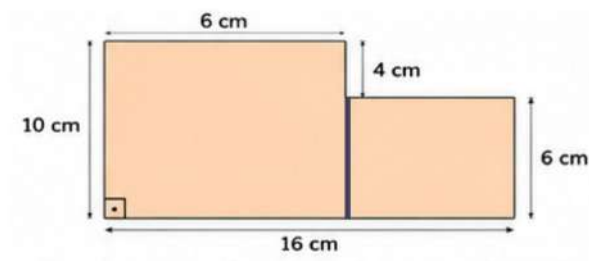
1. A hipotenusa do triângulo mede $\sqrt{2}$

O triângulo amarelo tem ambos os catetos medindo $\frac{\sqrt{2}}{2}$, e hipotenusa medindo 1.

Logo, sua área é $\frac{1}{4}$. Como são 4 triângulos, então a área total da área amarela é de 1 cm quadrado.

2) 84 cm^2

3) 60 cm^2



4)

a- 450 cm^2

b- 225 cm^2

c- As áreas formam a sequência

900, 450, 225, 112,5...

Cada termo é metade do anterior.

Logo, trata-se de uma progressão geométrica (PG) de razão $\frac{1}{2}$

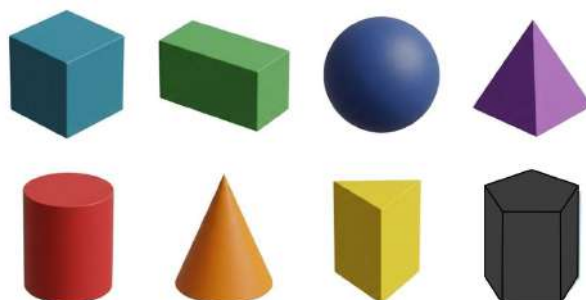
Então,

$$A_n = 900 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

é a área do n-ésimo quadrado.

C.2 Geometria Espacial

Geometria espacial é a parte da matemática que estuda os sólidos geométricos, ou seja, figuras que possuem três dimensões (comprimento, largura e altura). Exemplos dessas figuras são os cubos, paralelepípedos, cilindros, cones, esferas, pirâmides, prismas, entre outros.



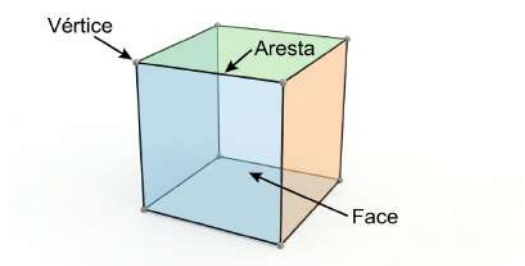
Neste módulo, o foco será o **cubo**. Ele é um sólido formado por seis faces quadradas iguais. Todo cubo possui:

- 6 faces
- 12 arestas
- 8 vértices

Face: é cada lado plano do cubo.

Aresta: é o encontro de duas faces.

Vértice: é o ponto onde três arestas se encontram.



Nem sempre as figuras são formadas por apenas um cubo. Muitas delas apresentam vários cubos unidos, formando uma única construção, chamadas de **sistemas de cubos**.

Exemplo:



Nesses casos, observe cuidadosamente a figura. Se houver cubos escondidos atrás de outros, eles também fazem parte da construção. Nunca conte apenas os cubos visíveis!

Em sistemas de cubos, dois cubos podem ficar encostados.



Quando isso acontece:

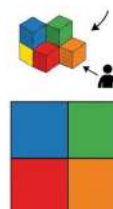
- as faces que ficam encostadas deixam de aparecer;
- apenas as faces externas continuam visíveis.

Por isso, nem toda face recebe pintura em muitas questões: as faces internas são retiradas da contagem de faces com tinta.

Uma mesma construção pode ser observada de diferentes posições. As principais vistas são:

Vista frontal

É aquilo que enxergamos olhando a construção de frente.

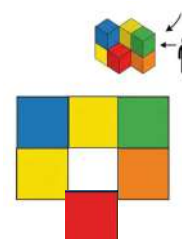


Vista lateral

É o que aparece quando olhamos de um dos lados.

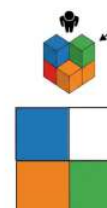
Pode ser da direita ou da esquerda.

(Considere que a imagem dada possui 6 cubos em sua formação).



Vista superior

É a visão de cima.



Cada cubo possui seis faces. Entretanto, algumas podem ficar:

- encostadas em outro cubo;
- apoiadas sobre uma mesa ou outro objeto.

Essas faces não aparecem em nenhuma vista e são chamadas de **ocultas**. As demais são chamadas de **faces visíveis**.

Questões estilo olímpicas:

- 1) Um cubo grande foi construído juntando 27 cubinhos iguais. Depois, todas as faces externas foram pintadas de azul. Determine:
 - a) Quantos cubinhos receberam tinta em exatamente uma face?

b) Quantos receberam tinta em exatamente duas faces?

c) Quantos receberam tinta em exatamente três faces?

d) Quantos não receberam tinta?

Explique como você chegou a cada resposta.

2) Uma construção é formada por vários cubos. Quando observada:

- pela frente aparecem 4 cubos;
- pelo lado aparecem 3 cubos;
- por cima aparecem 5 cubos.

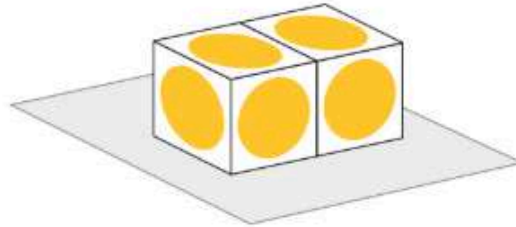
Qual é o menor número possível de cubos dessa construção? Justifique sua resposta desenhando ou descrevendo uma possível montagem.

3) Uma construção é formada por 8 cubos iguais. Ela está apoiada sobre uma mesa.

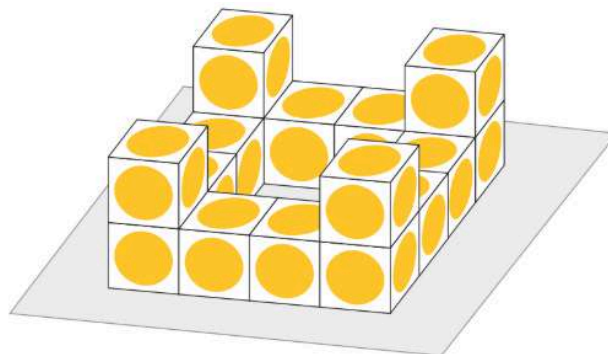
Sabendo que existem exatamente **30 faces visíveis**, determine quantas faces estão escondidas. Explique todos os cálculos realizados.

- 4) Antônio tem vários dados idênticos com faces numeradas apenas com números pares: 2, 4, 6, 8, 10 e 12. Nesses dados, a soma dos números em faces opostas é sempre igual a 14. Ela cola alguns desses dados e coloca adesivos coloridos nas faces não coladas, inclusive nas faces que estão em contato com a mesa.

a) Qual é a maior soma possível para todos os números que foram cobertos por adesivos nos dois dados colados?



b) Antônio colou vários dados formando uma estrutura maior, conforme mostrado na figura. Sabendo que ele precisa comprar os adesivos e cada um custa R\$ 0,50, qual será o valor total gasto para cobrir todas as faces expostas (lembrando de incluir as que tocam a mesa)?



Gabarito:

1)

- a- 6 cubinhos.
- b- 12 cubinhos.
- c- 8 cubinhos.
- d- 1 cubinho.

2) 6 cubinhos.



3) Existem exatamente 18 faces escondidas na construção de 8 cubos.

Passo 1: Calcular o total de faces

- Cubos utilizados: 8 unidades.
- Faces por cubo: 6 faces.
- Faces totais: $8 \times 6 = 48$ faces

Passo 2: Determinar as faces escondidas

- Faces visíveis: 30 faces.
- Faces totais: 48 faces.
- Faces escondidas: $48 - 30 = 18$ faces.

4)

- a- 72.
- b- 14 reais.

C.3 Ângulos

C.5.1 Glossário

1.1 Def - Definição

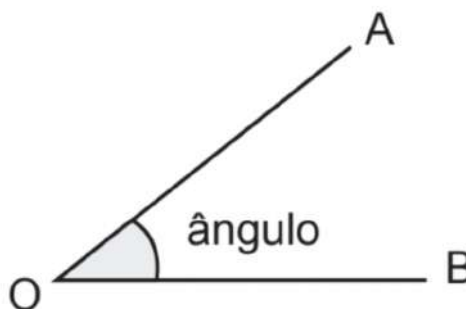
1.2 Teo: Teorema - afirmação matemática que pode ser provada.

1.3 Prop: Proposição - frase declarativa que possui sentido completo.

C.5.2 Ângulo

O Ângulo é a área delimitada pelo encontro de duas semirretas. Ele pode ser medido em graus ($^{\circ}$) ou radianos (rad). Porém, utilizaremos majoritariamente a medição em graus por ser mais usual em olimpíadas de Matemática.

O ponto O de intersecção (encontro) das retas r e s que formam um ângulo é chamado **ponto de origem**.



C.5.3 Tipos de ângulo

Os ângulos podem ser classificados em relação a sua medida, sendo eles:

3.1 Ângulo Agudo

- Dado um ângulo de x° , ele é classificado como agudo quando $x > 0$ e $x^{\circ} < 90^{\circ}$.

3.2 Ângulo Reto

- Dado um ângulo de x° , ele é classificado como reto $x^{\circ}=90^{\circ}$.

3.3 Ângulo Obtuso

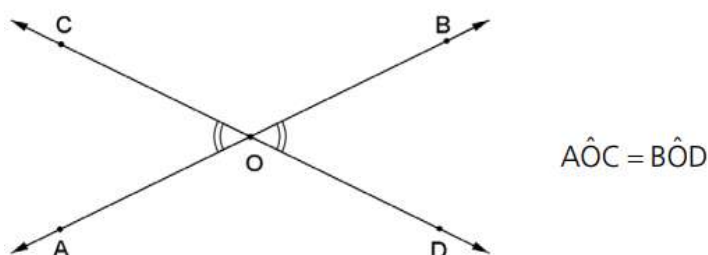
- Dado um ângulo de x° , ele é classificado como obtuso quando $x^{\circ}>90^{\circ}$ e $x<180$

3.4 Ângulo Raso

- Dado um ângulo de x° , ele é classificado como raso quando $x^\circ=180^\circ$

C.5.4 Opostos pelo vértice

Os ângulos definidos a partir da intersecção de duas retas que são opostos pela origem possuem a mesma medida, sendo chamados de ângulos opostos pelo vértice - OPV.



Prova: Dadas as retas AB e CD, ao analisar a reta CD temos $\widehat{BÔD} + \widehat{CÔB} = 180^\circ$. Analisando a reta AB, $\widehat{CÔB} + \widehat{CÔA} = 180^\circ$. Como ambas expressões possuem o mesmo valor, podemos igualar elas: $\widehat{BÔD} + \widehat{CÔB} = \widehat{CÔB} + \widehat{CÔA}$, logo $\widehat{BÔD} = \widehat{CÔA}$.

C.5.5 Ângulos alternos internos e externos

Sejam r e s duas retas paralelas situadas em um mesmo plano, com uma reta transversal a r e s. A intersecção de t com r determina os ângulos a, b, c e d da figura, e a intersecção de t com s determina os ângulos e, f, g e h.

Vamos provar que $c = a = e = g$, $f = h = b = d$

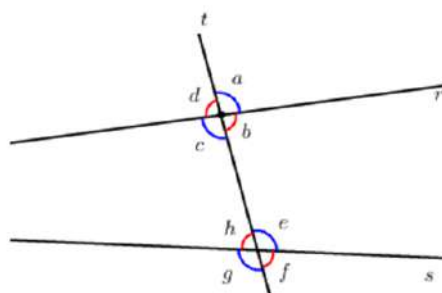


Figura 1: retas cortadas por uma transversal.

Observando a Figura 1, note que os pares de ângulos a, c / e, g são opostos pelo vértice (OPV), logo, $c = a$ / $e = g$. Portanto, se $c = e$, então $a, c, e = g$. Daí, como d é o suplementar de c , e h é o suplementar de g , temos

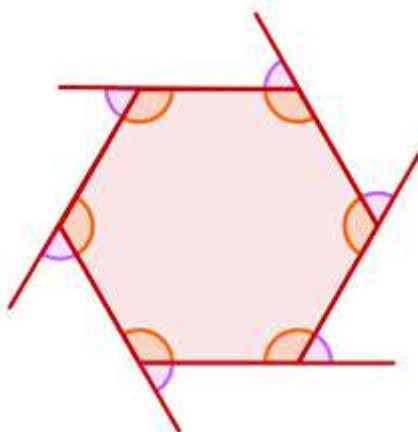
$$d = 180 - c = 180 - g = h$$

Então, como acima, concluímos que $b = d = f = h$.

Analogamente, podemos provar que $c = a = e = g$.

C.5.6 Ângulos em polígonos

Em um polígono temos os ângulos internos, que estão dentro da figura, como marcado em laranja e os ângulos externos, que estão fora da figura, como marcado em roxo. Para a definição dos ângulos externos, deve-se prolongar um dos lados do polígono.



É possível descobrir a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer e a medida de cada ângulo de um polígono regular por meio da sua divisão em triângulos.

Teorema: A soma dos ângulos internos de um polígono é $(n-2) \times 180^\circ$

- Prova: Basta escolher um vértice do polígono para realizar a triangulação (processo de dividir o polígono em triângulos que não se interceptam e seus vértices são os vértices do polígono), dessa forma teremos $n-2$ triângulos com seus ângulos nos vértices do polígono. Assim, sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , teremos como a soma total $(n-2) \times 180^\circ$.

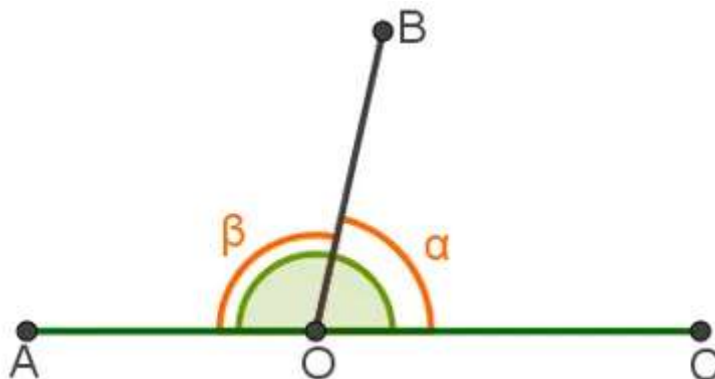
Teorema: Cada ângulo de um polígono regular mede $(n-2)180^\circ/n$

- Prova: Dado que a soma de todos os ângulos internos de um polígono é $(n-2)180^\circ$, sabendo que todos os ângulos são da mesma medida, basta dividir pela quantidade de ângulos (que é o mesmo valor da quantidade de lados) n .

Teorema: A soma dos ângulos externos de um polígono é sempre 360° .

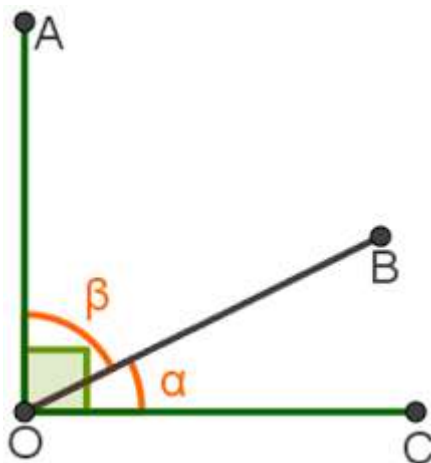
C.5.7 Ângulos Suplementares e Complementares

O ângulo **suplementar** Y de um ângulo X é o qual tal que $X^\circ + Y^\circ = 180^\circ$



Exemplo: O ângulo de 50° é o ângulo suplementar de 130° , pois $130^\circ + 50^\circ = 180^\circ$

O ângulo **complementar** Y de um ângulo X é o qual tal que $X^\circ + Y^\circ = 90^\circ$



Exemplo: O ângulo de 70° é o ângulo complementar de 20° , pois $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$

C.5.8 Exercícios

1) Sabendo que a soma dos ângulos internos de um polígono regular é 1800° , descubra:

a) A quantidade de lados do polígono.

b) A medida de cada ângulo do polígono.

c) A soma dos ângulos externos do polígono.

2) Pedro joga um jogo todo dia no seu telefone. Ele consiste em, a partir de um ângulo, Pedro deve clicar na alternativa que classifica-o corretamente, caso ele acerte, Pedro ganha 10 pontos, caso erre, ele ganha 0 pontos. Hoje Pedro jogou cinco rodadas do jogo e conseguiu 40 pontos, dada a medida do ângulo e a alternativa marcada por Pedro, qual rodada ele errou? E qual alternativa deveria ser marcada para que Pedro conseguisse os 50 pontos?

Rodada 1: o ângulo mede 50°

- I) O ângulo é agudo**
 - II) O ângulo é obtuso**
 - III) O ângulo é reto**
 - IV) O ângulo é raso**
- Pedro marcou I

Rodada 2: o ângulo mede 90°

- I) O ângulo é agudo**
 - II) O ângulo é obtuso**
 - III) O ângulo é reto**
 - IV) O ângulo é raso**
- Pedro marcou III

Rodada 3: o ângulo mede 117°

- I) O ângulo é agudo**

II) O ângulo é obtuso

III) O ângulo é reto

IV) O ângulo é raso

Pedro marcou II

Rodada 4: o ângulo mede 180°

I) O ângulo é agudo

II) O ângulo é obtuso

III) O ângulo é reto

IV) O ângulo é raso

Pedro marcou II

Rodada 5: o ângulo mede 12°

I) O ângulo é agudo

II) O ângulo é obtuso

III) O ângulo é reto

IV) O ângulo é raso

Pedro marcou I

3) A partir do ângulo de 35° , determine:

a) Seu ângulo complementar.

b) Seu ângulo suplementar.

c) O ângulo suplementar do ângulo complementar de 35° .

4) A partir de duas retas paralelas r e s , traça-se uma reta transversal t tal que um dos pares de alternos internos têm soma igual a 160° . Qual é a soma do outro par de ângulos alternos internos.

C.5.9 Resoluções

1)

- a) Sabendo que a quantidade de lados de um polígono regular é igual a quantidade de ângulos, realizar a expressão a partir da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono regular:

$$(n-2)180^\circ = 1800^\circ$$

$$n-2 = 1800^\circ/180^\circ$$

$$n-2 = 10$$

$$n = 10 + 2 = 12.$$

Logo, ele tem 12 lados.

- b) Sabendo que a soma dos ângulos internos do polígono é 1800° e que ele possui 12 ângulos, basta dividir a soma pela quantidade de ângulos para obter a medida de cada, uma vez que em um polígono regular todos os ângulos possuem mesma medida. Assim temos:

$$1800^\circ/12 = 150^\circ.$$

Logo a medida de cada ângulo é 150° .

- c) A soma dos ângulos externos de um polígono é sempre 360° . Logo, a resposta é 360°

2) Vamos resolver rodada por rodada afim de encontrar o erro:

Rodada I

O ângulo de 50° é maior que 0° e menor que 90° , logo ele é agudo.

Alternativa certa: I.

Rodada II

O ângulo de 90° por definição é reto.

Alternativa certa: III

Rodada III

O ângulo de 117° é maior que 90° e menor que 180° , logo ele é obtuso.

Alternativa certa: II

Rodada IV

O ângulo de 180° é por definição raso.

Alternativa certa: IV

Dessa forma, é possível concluir que Pedro errou a rodada IV e para obter os 50 pontos deveria ter marcado a afirmativa IV.

3)

- a) Sabendo que o ângulo complementar de um ângulo X é aquele em que a soma de ambos resulta em 90° , temos a expressão:

$$35^\circ + y = 90^\circ$$

$$y = 90^\circ - 35^\circ$$

$$y = 55^\circ$$

Logo, o ângulo complementar de 35° é 55° .

- b) Sabendo que o ângulo suplementar de um ângulo X é aquele em que a soma de ambos e 180° , temos a expressão:

$$35^\circ + z = 180^\circ$$

$$z = 180^\circ - 35^\circ$$

$$z = 155^\circ$$

Logo, o ângulo suplementar de 35° é 155° .

- c) Vamos dividir o problema em partes. Primeiro devemos achar o ângulo complementar de 35° , que a partir da letra A sabemos que é 55° .

Agora, devemos encontrar o ângulo suplementar de 55° . Podemos fazer isso a partir da expressão:

$$w + 55^\circ = 180^\circ$$

$$w = 180^\circ - 55^\circ$$

$$w = 135^\circ$$

Logo, o ângulo suplementar do ângulo complementar de 35° é 135° .

4) Sabemos que o par de ângulos alternos internos possui mesma medida, desse modo cada um deles mede $160^\circ/2=80^\circ$. Além disso, o outro par de ângulos alternos internos é tal que cada um e o suplementar de cada ângulo do primeiro par (em que cada ângulo mede 80). Portanto, temos que cada ângulo mede:

$$x + 80^\circ = 180^\circ$$

$$x = 100^\circ$$

Como são dois ângulos de mesma medida, deve-se multiplicar esse valor por 2.

Logo, a soma do outro par de ângulos alternos internos é 200° .

C.4 Triângulos

C.6.1 O que é um triângulo?

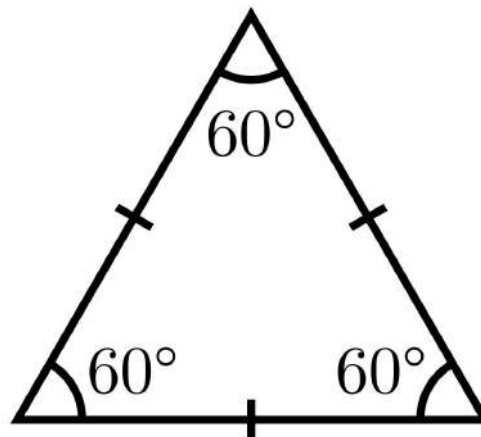
É um polígono convexo presente na geometria plana que possui três lados. Muito famoso em questões de geometria olímpica, ele é utilizado na maioria dos problemas em competições como OBMEP, OBM e TM2.

C.6.2 Classificação dos triângulos

2.1 Quanto a medida de seus lados

a) Triângulo equilátero

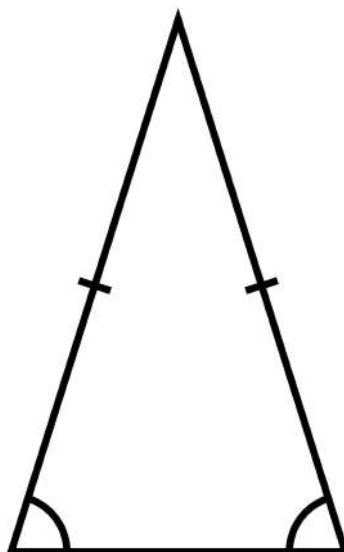
- O triângulo equilátero é aquele que possui seus três lados com mesma medida
- Dado um triângulo equilátero, qualquer um de seus três ângulos mede 60°
- Qualquer triângulo cujos seus três ângulos medem 60° ou que possui os três lados de mesma medida é equilátero



b) Triângulo isósceles

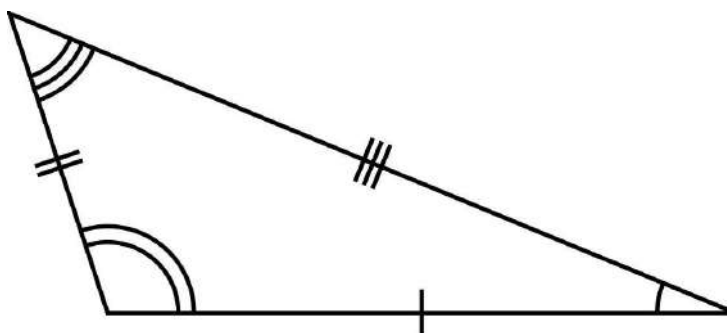
- É um triângulo que possui dois lados da mesma medida.
- Dado um triângulo que possui dois lados de mesma medida, os ângulos opostos a esses lados serão de mesma medida.

- Dado um triângulo que possui dois ângulos de mesma medida, ele possui dois lados de mesma medida (ou o contrário) e é isósceles.



c) Triângulo Escaleno

- O triângulo escaleno é aquele que possui seus três lados com medidas diferentes entre si.



2.2 Quanto a medida de seus ângulos

a) Triângulo agudo

- Um triângulo agudo é aquele cujos três ângulos são agudos.

b) Triângulo obtusângulo

- Um triângulo obtusângulo é aquele que possui um ângulo obtuso

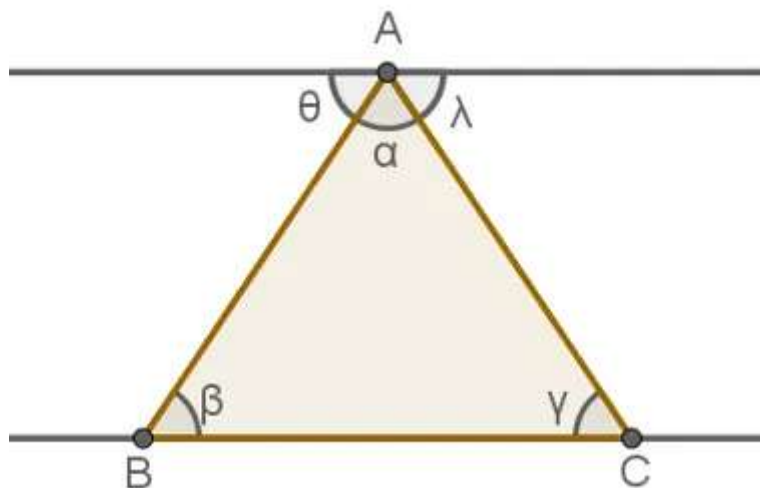
c) Triângulo retângulo

- Um triângulo reto é aquele que possui um ângulo de 90°

C.6.3 Soma dos ângulos internos

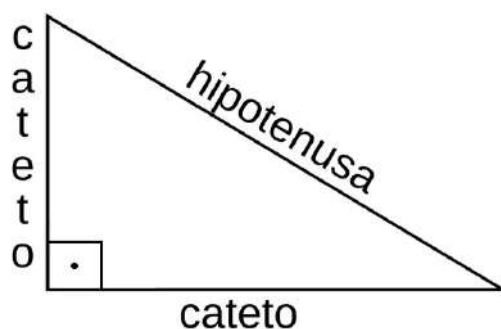
Teorema: A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° .

- Prova: A partir de um triângulo ABC, traça-se a paralela a base BC do triângulo que passa por A. Dessa forma teremos duas retas paralelas cortadas por transversais e pela propriedade dos alternos internos, afirmamos que os ângulos dos vértices B e C completam juntamente com o ângulo do vértice A uma reta, logo, sua soma é 180.



C.6.4 Teorema de Pitágoras

Dado um triângulo retângulo, os lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos e o lado oposto a ele hipotenusa.



Teorema de Pitágoras: Dado um triângulo retângulo de catetos A e B e hipotenusa C, a seguinte relação é verdadeira:

$$A^2 + B^2 = C^2$$

C.6.5 Áreas

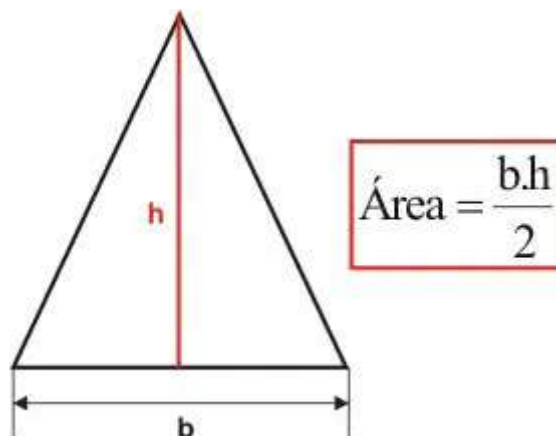
5.1 Def: A área de um triângulo é

$$\frac{b \times h}{2}$$

Em que:

b - base do triângulo

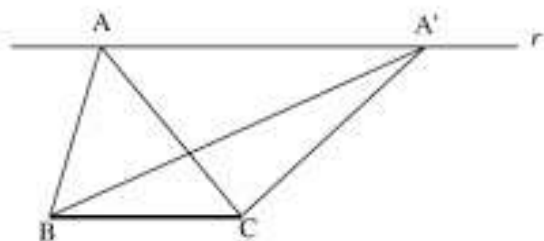
h - altura relativa à base escolhida



Caso especial: No triângulo retângulo, a área pode ser definida como $\frac{\text{cateto} \times \text{cateto}}{2}$, visto que um cateto é perpendicular ao outro, podendo ser considerado a altura do triângulo.

Nesse sentido, podemos notar que a partir dessa fórmula existem três maneiras de calcular a área provenientes dos três lados do triângulo, que podem ser cada um utilizados como base.

Além disso, podemos afirmar que dados dois triângulos de mesma base e mesma altura, suas áreas são equivalentes, independente de seu formato.



Por exemplo, sendo r e BC retas paralelas e os triângulos ABC e $A'BC$, ambos possuem a mesma área pois a base BC é a mesma e a altura, medida pela semi reta perpendicular a reta r e a BC , é a mesma.

C.6.6 Exercícios

1) A partir de um triângulo ABC retângulo de hipotenusa $10\sqrt{2}$ cm, sabendo que o triângulo é isósceles, determine sua área.

2) Dois triângulos possuem a mesma área. Sabendo que a base do primeiro é 120 cm e a altura é H cm e o segundo tem base $2y$ cm e altura $3H$ cm, determine a base do segundo triângulo.

3) Sendo ABC e DEF dois triângulos isósceles tais que os ângulos de ABC são de $(2x)^\circ$, $(2x)^\circ$, y° e os ângulos de DEF são de y° , y° , 20° . Encontre os ângulos do triângulo ABC .

4) A partir de uma semi reta AB , coloca-se o ponto C entre A e B tal que $C \neq A$ e $C \neq B$. Além disso, existem pontos D e E em um mesmo lado do plano delimitado pela semi reta AB tais que o triângulo DCB é equilátero e o triângulo EAC é isósceles com $EC = EA$ e o ângulo $\widehat{AEC} = 20^\circ$. Determine a medida do ângulo $\angle ECD$.

C.6.7 Resoluções

1) Sabendo que o triângulo é retângulo, é possível utilizar o teorema de pitágoras em que:
 $cateto^2 + cateto^2 = hipotenusa^2$

Além disso, sendo o triângulo ABC isósceles, ambos catetos possuem mesma medida, logo caso considerarmos essa medida de X, temos:

$$X^2 + X^2 = (10\sqrt{2})^2$$

$$2X^2 = 100 \times 2$$

$$X^2 = 100 \times 2 \div 2$$

$$X^2 = 100$$

$$X = 10$$

Agora, com cada cateto valendo 10 cm e sendo a área do triângulo retângulo dada por $\frac{cateto \times cateto}{2}$, basta colocar os valores na fórmula:

$$Área = 10 \times 10 \div 2 = 100 \div 2 = 50 \text{ cm.}$$

Portanto a área do triângulo é 50 cm.

2) Utilizando a fórmula da área para cada triângulo, temos:

Triângulo 1 (de base 120):

$$120 \times H \div 2 = 60 \times H$$

Triângulo 2 (de base 2y):

$$2y \times 3H \div 2 = 3 \times H \times y$$

Como as áreas são iguais, as equações também são, logo podemos igualá-las, dessa forma:

$$\begin{aligned}60 \times H &= 3 \times H \times y \Leftrightarrow \\60 &= 3 \times y \Leftrightarrow \\y &= 60 \div 3 \Leftrightarrow \\y &= 20 \text{ cm.}\end{aligned}$$

Logo $y = 20 \text{ cm}$.

3) Pelo fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo resultam em 180° , podemos fazer uma expressão da soma dos ângulos do triângulo DEF, dessa forma temos:

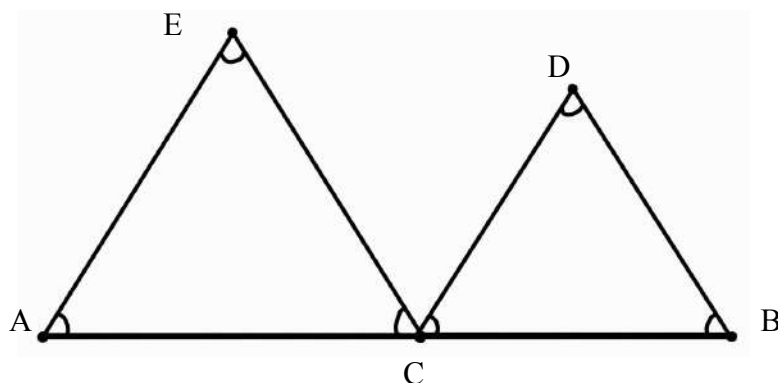
$$\begin{aligned}y + y + 20 &= 180 \\2 \times y &= 180 - 20 \\2 \times y &= 160 \\y &= 160 \div 2 \\y &= 80^\circ\end{aligned}$$

Agora, sabendo o valor de y , podemos fazer a mesma ideia com o triângulo ABC:

$$\begin{aligned}2 \times x + 2x + 80 &= 180 \\4 \times x &= 180 - 80 \\4 \times x &= 100 \\x &= 100 \div 4 \\x &= 25^\circ \\2 \times x &= 25 \times 2 = 50^\circ\end{aligned}$$

Portanto, os ângulos do triângulo ABC são 50° , 50° e 80°

4) Por meio do enunciado, chegamos a seguinte imagem:



O ângulo $\angle ECD$ é dado por $180 - \angle DCB - \angle ECA$, visto que AB é uma reta.

Analisando o triângulo DCB, é dado que ele é equilátero, logo todos os seus ângulos medem 60° e $\angle DCB = 60^\circ$.

Analisando o triângulo AEC, sabemos que ele é isósceles com $EA = EC$, ou seja, $\angle EAC = \angle ECA$ e $\angle AEC = 20^\circ$. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° e utilizando $\angle ECA = z$, podemos realizar a expressão:

$$2z + 20 = 180$$

$$2z = 180 - 20$$

$$2z = 160^\circ$$

$$z = 80^\circ$$

Assim, $\angle ECA = 80^\circ$.

Substituindo os ângulos encontrados na relação primeiramente enunciada afim de encontrar $\angle ECD$, temos:

$$\angle ECD = 180^\circ - \angle ECA - \angle DCB$$

$$\angle ECD = 180 - 80 - 60$$

$$\angle ECD = 40^\circ$$

Logo, o ângulo $\angle ECD = 40^\circ$.

C.5 Congruência e semelhança de triângulos

C.7.1 Contextualização

A semelhança e a congruência de triângulos, muito famosa e utilizada na geometria olímpica, permite a descoberta de medidas e ângulos essenciais ao desenvolvimento de uma série de problemas.

C.7.2 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são ditos **semelhantes** se eles possuem os três **ângulos ordenadamente congruentes e lados correspondentes proporcionais**.

- Utiliza-se a denotação $\sim$ para dizer que dois triângulos são semelhantes.

2.1 Casos de semelhança de triângulos:

a) Ângulo-ângulo (AA)

Se dois triângulos possuem dois ângulos congruentes entre si, pode-se afirmar que eles são semelhantes.

b) Lado-lado-lado (LLL)

Se os três lados de um triângulo são igualmente proporcionais aos três lados de outro triângulo, pode-se afirmar que eles são semelhantes.

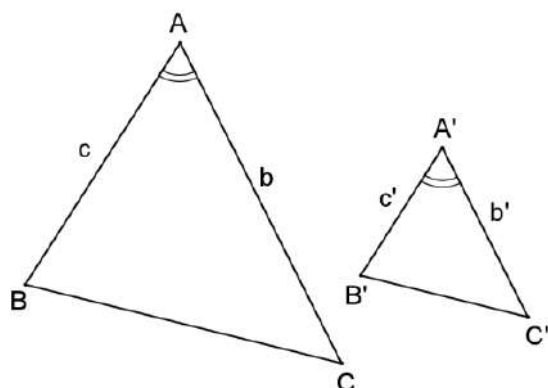
c) Lado-ângulo-lado (LAL)

Se um lado é proporcional, um ângulo é congruente e um lado é proporcional, nessa ordem, pode-se afirmar que dois triângulos são semelhantes.

2.2 Constante de proporcionalidade (k)

Como dito anteriormente, ao considerar dois triângulos semelhantes se seus lados correspondentes são proporcionais. Dessa forma, podemos afirmar que dois triângulos são semelhantes se eles possuem uma constante de proporcionalidade k , então a razão entre os lados proporcionais, sempre pegando os lados de um mesmo triângulo e dividindo pelos lados do outro triângulo, possuem o mesmo valor e ele é k .

Exemplo:



Ambos triângulos são semelhantes pelo caso Lado-ângulo-lado, logo

$$k = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Nesse sentido, sabendo a medida dos lados de um triângulo ABC e a constante de proporcionalidade k , tendo um segundo triângulo DEF semelhante ao primeiro, podemos descobrir a medida de seus lados ao multiplicar os lados de ABC por k .

Importante: Dados dois triângulos semelhantes ABC e DEF, a constante de proporcionalidade depende de qual ordem estamos analisando, ou seja, sendo a, b, c os lados do triângulo ABC, d, e, f os lados do triângulo DEF sendo a semelhante ao lado d , a constante k ao analisar ABC em função de DEF é diferente de analisar DEF em função de ABC para $k \neq 1$.

Então, para $k \neq 1$:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{d}{a}$$

C.7.3 Congruência de triângulos

Dois triângulos são ditos congruentes se seus lados ordenadamente possuem mesma medida e os ângulos opostos aos lados são semelhantes.

3.1 Casos de congruência

a) Lado-ângulo-lado (LAL)

Se dois triângulos possuem, nessa ordem, um lado, um ângulo e um lado congruentes, podemos afirmar que eles são congruentes.

b) Lado-lado-lado (LLL)

Se dois triângulos possuem os três lados da mesma medida, podemos afirmar que eles são congruentes.

c) Ângulo-lado-ângulo (ALA)

Se dois triângulos possuem, nessa ordem, um ângulo, um lado e um ângulo congruente, podemos afirmar que eles são congruentes.

d) Lado-ângulo-ângulo (LAA)

Se dois triângulos possuem, nessa ordem, um lado e dois ângulos congruentes, podemos afirmar que eles são congruentes.

- **Observação:** sabendo que dois triângulos são congruentes de acordo com algum dos casos acima, podemos considerar seus outros lados e ângulos da mesma medida.

3.3 Diferenças:

Dois triângulos semelhantes entre si não afirmam que ambos são congruentes. Como visto anteriormente, dois triângulos semelhantes podem ter lados de medidas diferentes, enquanto dois triângulos congruentes possuem necessariamente os três lados de medidas iguais. Além disso, podemos afirmar que dois triângulos congruentes são semelhantes entre si, pois basta a constante de proporcionalidade (k) ser igual a 1.

C.7.4 Exercícios

1) Dados dois triângulos semelhantes ABC e DEF, sabendo que no triângulo ABC há um ângulo de 30° cujo lado oposto mede 3cm e um ângulo de 60° cujo lado oposto mede 4cm. Sabendo que a constante de proporcionalidade (k) é igual a 2 comparando os lados de ABC aos de DEF. Encontre a medida dos lados de DEF.

2) Dado um triângulo ABC com um ângulo de 30° no ponto A cujo lado oposto mede 5 cm, um ângulo de 40° no ponto B cujo lado oposto mede 8 cm e um ângulo de 110° no ponto C cujo lado oposto mede 10 cm. É criado um ponto P no lado AB tal que ele está a 3 cm do ponto B e é criado um ponto Q no lado BC tal que a reta feita pelos pontos P e Q formam um ângulo de 30° em QPB. Descubra a medida dos lados do triângulo PQB.

3) Dois triângulos ABC e DEF são semelhantes. Sabendo que os lados de ABC medem 2m, 4m e 6m e os lados de DEF medem Xm, 2X m e Ym, sendo X e Y inteiros positivos, determine a constante de proporcionalidade (k), que também é um inteiro positivo, em função de X e Y.

4) Dois triângulos ABC e DEF possuem lados medindo 6m, 8m e 10m. Um triângulo GHI é semelhante a ABC com a constante de proporcionalidade (k_2) igual a $\frac{2}{3}$ da constante entre ABC e DEF sendo GHI menor que ABC. Determine a medida dos lados de GHI.

C.7.5 Resoluções

1) Sabendo que os dois triângulos são semelhantes, podemos aplicar a constante de proporcionalidade para encontrar os dois lados de DEF. Nesse sentido, temos:

$$3 \times 2 = 6$$

$$4 \times 2 = 8$$

Analisando o triângulo ABC, percebemos que seus ângulos são 30, 60 e $180 - 30 - 60 = 180 - 90 = 90$. Dessa forma, ele é retângulo e é possível aplicar o teorema de pitágoras, fazendo isso temos:

$$3^2 + 4^2 = x^2$$

$$9 + 16 = x^2$$

$$25 = x^2$$

$$x = 5$$

Sabendo a medida do terceiro lado, basta novamente aplicar a constante de proporcionalidade:

$$5 \times 2 = 10$$

Logo, os lados do triângulo DEF medem 6 cm, 8 cm e 10 cm.

2) Podemos afirmar que os triângulos ABC e PBQ são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo, nesse sentido, sabendo um dos lados de PBQ e todos os lados de ABC podemos encontrar a constante de proporcionalidade k.

Dessa forma, analisando PQB em relação a ACB temos:

$$K = 3/10.$$

Multiplicando pelos lados de ABC:

$$8 \times 3/10 = 24/10 = 2,4$$

$$5 \times 3/10 = 15/10 = 1,5$$

Logo, os lados de PQB medem 1,5 cm, 2,4 cm e 3 cm.

3) Sabendo que os triângulos são semelhantes, dado uma constante de proporcionalidade k, temos:

2k, 4k, 6k e 2X, X, Y

Sendo X e Y inteiros positivos e K inteiro positivo, como 2X é o dobro de X eles serão o par de medidas que um valor e o dobro do outro multiplicados por k.

Logo,

$$X = 2k$$

$$2X = 4k$$

$$Y = 6k$$

Utilizando as equações acima, podemos encontrar k em função de X e Y:

$$k = X \div 2$$

$$k = Y \div 3$$

Portanto, $k = X \div 2 = Y \div 3$.

4) Devido ao caso lado-lado-lado, temos que os triângulos ABC e DEF são congruentes e portanto a constante $k = 1$.

Com o triângulo GHI semelhante a ABC com a constante $k_2 = \frac{2}{3} k$, sabendo que $k = 1$,

$$k_2 = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

Multiplicando pelos lados do triângulo ABC, temos:

$$\frac{2}{3} \times 6 = 12 \div 3 = 4$$

$$\frac{2}{3} \times 8 = 16 \div 3 = 16/3$$

$$\frac{2}{3} \times 10 = 20 \div 3 = 20/3$$

Logo, os lados medem 4m, 16/3 m e 20/3 m.

D. Combinatória

D.1 Princípio Multiplicativo - Revisão

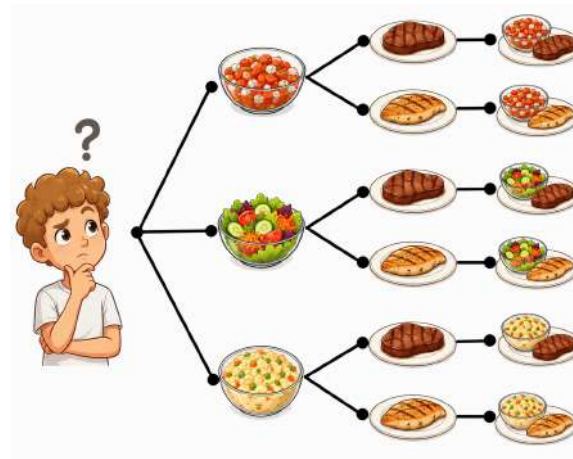
Na seção B.3, você deve ter aprendido sobre o Princípio Multiplicativo, que diz que a quantidade total de formas nas quais um evento pode ocorrer, dado a quantidade de opções disponíveis em cada etapa da formação do evento, é o produto dessas quantidades de opções.

Recapitule a lógica do Princípio Fundamental da Contagem nos seguintes exemplos:

1) Miguel vai almoçar com seus amigos no restaurante M.G., onde ele pode montar seu prato escolhendo uma dentre três opções de salada: vinagrete, salpicão e salada mista; e uma dentre duas opções de carne: bife de boi e filé de frango. De quantas maneiras diferentes Miguel pode montar sua refeição?

Resolução:

Para montar sua refeição, Miguel precisa fazer duas escolhas **completamente independentes**: uma escolha de salada e uma escolha de carne. Assim sendo, para cada uma das três saladas escolhidas, pode-se escolher **qualquer uma** das outras duas carnes. Assim, basta multiplicar o número de opções diferentes disponíveis em cada escolha para obter o número total de pratos distintos possíveis, como é demonstrado no **diagrama de árvore** abaixo. Assim, Miguel pode montar sua refeição de $3 \cdot 2 = 6$ maneiras diferentes.



2) Sophia vai sair para uma festa e para isso deve escolher qual roupa ela vai vestir. Sabendo que a menina têm 5 opções de sapatos, 3 opções de calças e 6 opções de blusas, determine de quantas maneiras ela pode se vestir.



Resolução:

A chave para resolver esse problema clássico do Princípio Multiplicativo é perceber que Sophia tem três escolhas completamente independentes a fazer: uma escolha de sapato, uma escolha de calça e uma escolha de blusa. Dizer que as escolhas são independentes significa dizer que tendo escolhido um dos 5 sapatos, ela pode escolher qualquer uma das 3 calças, e, depois, qualquer uma das 6 blusas, sem que uma escolha interfira na outra.

Sendo assim, basta multiplicar as opções independentes para obter o total de formas que Sophia pode se vestir: $5 \cdot 3 \cdot 6 = 90$ formas.

3) Pedro Augusto monta sua rotina durante um dia de férias seguindo a seguinte regra: ele estuda Física ou Matemática pela manhã, joga Mario Kart, Lego Batman ou Mortal Kombat durante a tarde, e assiste Vingadores, Star Wars, Rei Leão, Senhor dos Anéis ou Matrix pela noite. Sabendo disso, de quantas formas diferentes Pedro consegue organizar a sua rotina nesse dia?

Resolução:

Assim como os últimos dois problemas, esse consiste em escolhas independentes, a matéria escolhida para o estudo de manhã não afeta o videogame que será jogado pela tarde, o que, por sua vez, não influi no filme assistido à noite. Desse modo, fazendo a contagem das opções listadas no enunciado, nota-se que P.A. possui:

- 2 opções de matérias;

- 3 opções de jogos; e
- 5 opções de filmes.

Dessa forma, basta multiplicar a quantidade de opções disponíveis em cada etapa para obter o total de rotinas distintas, chegando a $2 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{30 \text{ configurações}}$.

4) Daniel precisa criar uma nova senha para o aplicativo que está desenvolvendo. Daniel sabe que a senha deve seguir o seguinte modelo:

- A senha deve conter 5 caracteres;
- Os três primeiros caracteres devem ser algarismos de 0 a 9; e
- Os dois próximos caracteres devem ser letras maiúsculas.

Assim, 098BG, 371ZJ, 222KL e 160GG são todas senhas válidas, porém 1209H, 459HBA e 74VCS são todas senhas inválidas. Desse modo, quantas senhas distintas Daniel pode formar?

Resolução:

É possível interpretar a senha de 5 algarismos como uma sequência de 5 espaços vazios que devem ser preenchidos, um por um, seguindo as regras dadas.

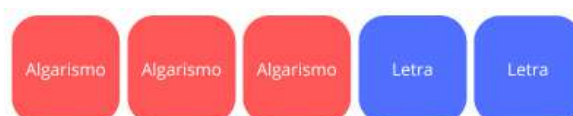
Para o primeiro espaço, pode-se escolher um dentre dez algarismos (0-9), o mesmo para o segundo espaço e para o terceiro espaço. Logo, os três primeiros espaços, ocupados por algarismos, podem ser preenchidos de $10 \cdot 10 \cdot 10 = \mathbf{1000 \text{ maneiras}}$.

Já para o quarto algarismo, pode-se escolher uma dentre as 26 letras do alfabeto, o mesmo para o quinto e último espaço. Assim, os dois últimos espaços, ocupados por letras, podem ser preenchidos de $26 \cdot 26 = \mathbf{676 \text{ maneiras}}$.

Com essas informações, muitos alunos se confundem na última etapa da resolução: afinal de contas, deve-se **somar** ou **multiplicar** os dois números obtidos?

Basta pensar que a senha é formada por uma das 1000 configurações para os três algarismos e uma das 676 configurações para as duas letras. Como a escolha de qual configuração de algarismos e letras formará a senha é independente, cabe o uso do Princípio Multiplicativo novamente.

Logo, Daniel pode formar $1000 \cdot 676 = \mathbf{676.000 \text{ senhas distintas}}$.



5) Quantos números pares de 3 algarismos podem ser formados?

Resolução:

Para formar uma sequência de 3 algarismos, sem restrições, pode-se escolher um dentre 10 algarismos para o primeiro espaço, um dentre 10 algarismos para o segundo espaço e um dentre 10 algarismos para o terceiro espaço. No entanto, o problema apresentado possui duas condições especiais que fazem com que uma aplicação direta do Princípio Fundamental da Contagem não baste:

i) O número deve ser par. Assim, o algarismo das unidades só pode ser ocupado pelos números 0, 2, 4, 6 ou 8, já que algarismo das unidades par é condição única e suficiente para formar um número par.

ii) O algarismo das centenas não pode ser zero. Isso por o zero na casa das centenas formaria um número do tipo 012, 034, 089, ou afim, não podendo ser considerado um número de 3 algarismos.

Assim, fazendo-se a sequência de escolhas:

- O algarismo das centenas pode ser preenchido por 9 algarismos (1-9)
- O algarismo das dezenas pode ser preenchido por 10 algarismos (0-9)
- O algarismo das unidades pode ser preenchido por 5 algarismos (0, 2, 4, 6 ou 8)

Logo, existem $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ números assim.

D.2 Operadores lógicos (E vs. OU)

Intuitivamente, você provavelmente sabe a diferença entre os operadores E x OU. Quando uma pessoa diz que vai ao cinema E ao parque ela diz que vai fazer as duas atividades (vai ao cinema e vai ao parque), mas quando diz que vai ao cinema OU ao parque só vai realizar uma das atividades (ou só vai ao cinema, ou só vai ao parque).

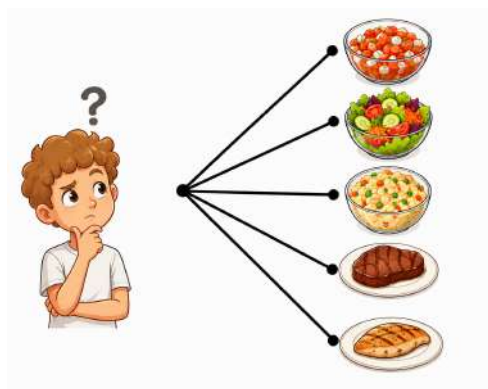
Na Análise Combinatória, é muito importante perceber e diferenciar esses dois operadores lógicos para entender o que se passa em um problema.

Em todos os problemas vistos até aqui, você fez uso do operador lógico E: no problema 1, por exemplo, Miguel precisava escolher uma salada E uma carne.

Vamos supor agora o cenário análogo para o operador OU, no seguinte exercício resolvido:

1) Em outro dia, Miguel volta ao restaurante M.G. com a sua família. Porém, dessa vez, o menino decide escolher um prato com um único componente: salada OU carne.

Sabendo que o estabelecimento continua oferecendo vinagrete, salada mista e salpicão como opções de salada, e bife de boi e filé de frango como opções de carne, de quantas formas distintas Miguel pode escolher sua refeição?



Resolução:

Se o prato será feito de um único componente, chega-se a seguintes opções de refeição:

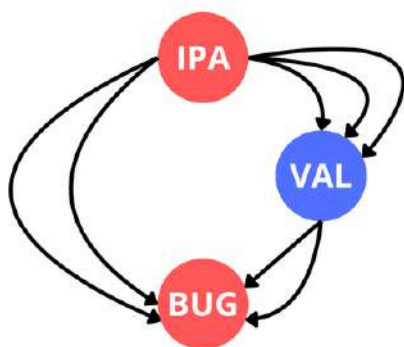
- Prato de vinagrete;
- Prato de salada mista;
- Prato de salpicão;
- Prato de bife de boi; e
- Prato de filé de frango.

Assim, existem 3 opções de pratos de salada e 2 opções de prato de carne, resultando em $3 + 2 = 5$

maneiras distintas de Miguel montar sua refeição.

No **Princípio Fundamental da Contagem**, vimos que se, para formar um evento maior, temos que escolher um dentre X elementos **E** um dentre Y elementos, no total, existem $X \cdot Y$ formas de compor o evento. No entanto, nesse exemplo, vimos que a quantidade de formas de se escolher um dentre X elementos **OU** um dentre Y elementos é $X + Y$. Logo, o operador **E** está associado à **multiplicação** da quantidade de opções, enquanto o operador **OU** está associado à **adição**.

2) Gabriel mora na cidade IPA e quer visitar seus avós na cidade BUG no final de semana. Entre a cidade IPA e a cidade BUG, está a cidade VAL. Existem várias estradas diferentes entre essas cidades, como é ilustrado no diagrama abaixo. De quantas formas distintas Gabriel pode ir de IPA até BUG?



Resolução:

Pelo diagrama, nota-se que para ir da cidade **IPA** até a cidade **BUG**, **OU** se usa um trajeto que passa pela cidade **VAL**, **OU** se usa um trajeto que vai de **IPA** até **BUG**, diretamente.

Assim, a quantidade total de formas de ir de **IPA** a **BUG** é a soma da quantidade de trajetos de **IPA** a **BUG** passando por **VAL** com a quantidade de trajetos de **IPA** a **BUG**, diretamente.

$$\#(\text{trajetos IPA-BUG}) = \#(\text{trajetos IPA-VAL-BUG}) + \#(\text{trajetos diretos IPA-BUG})$$

Pelo diagrama, nota-se que para ir de **IPA** a **BUG** passando por **VAL**, precisa-se escolher uma dentre 3 estradas de **IPA** a **VAL** E também escolher uma dentre duas estradas de **VAL** a **BUG**. Logo,

$$\#(\text{trajetos IPA} - \text{VAL} - \text{BUG}) = 3 \cdot 2 = 6 \text{ trajetos}$$

Pelo diagrama, também observa-se que existem 2 trajetos diretos de **IPA** a **BUG**.

$$\#(\text{trajetos diretos IPA} - \text{BUG}) = 2 \text{ trajetos}$$

Portanto, como Gabriel **OU** passa por **VAL**, **OU** não passa, existem $6 + 2 = 8$ formas de ir de **IPA** até **BUG**.

3) Enzo, depois de almoçar, vai até uma confeitaria para comprar sua sobremesa. O estabelecimento oferece dois tipos de doce:

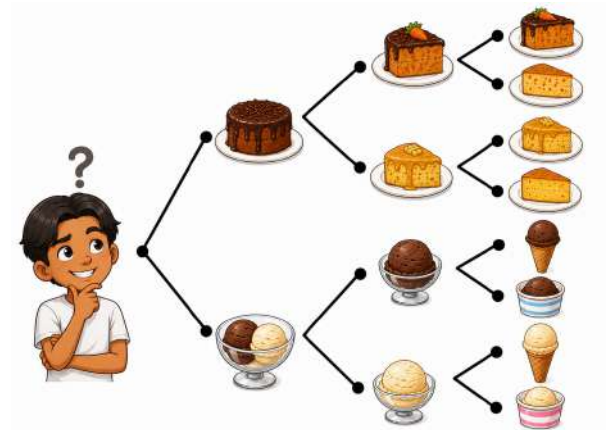
- i) um sorvete, que pode ser de chocolate ou de baunilha e pode ser colocado em uma casquinha ou em um pote.
- ii) um bolo, que pode ser de cenoura ou de milho e pode ter cobertura ou não ter cobertura.

Resolução:

Nesse problema, o crucial é notar que Enzo **OU** compra um sorvete, **OU** compra um bolo. Assim, a quantidade total de doces possíveis é a soma da quantidade de sorvetes possíveis com a quantidade de bolos possíveis:

$$\#(\text{doces}) = \#(\text{sorvetes}) + \#(\text{bolos})$$

Agora é preciso analisar a montagem de cada um dos dois tipos de bolos separadamente, conforme é demonstrado no diagrama de árvore.



Para o sorvete, deve-se escolher o sabor (baunilha, chocolate) **E** o compartimento (casquinha, pote). Assim, podem-se formar sorvetes de $2 \cdot 2 = 4$ **maneiras** distintas.

Já para o bolo, deve-se escolher o sabor (cenoura, milho) **E** a presença de cobertura (com cobertura, sem cobertura). Assim, podem-se formar bolos de $2 \cdot 2 = 4$ **maneiras** distintas.

Como já foi dito, Enzo compra um sorvete **OU** um bolo. Portanto, ele pode comprar $4 + 4 = 8$ **doces** distintos.

4) Júlia S. é uma engenheira aeronáutica que desenvolve sistemas de segurança nos quais os pilotos comunicam-se com as torres de comando por meio de códigos de 4 dígitos. Em um determinado sistema desenvolvido por Júlia, um código é tratado como código de emergência se ele começa ou termina com o dígito '9'. Quantos códigos de emergência podem ser criados nesse sistema?



Resolução:

A chave para resolver essa questão está na definição dada para um código de emergência: a resposta deve ser a quantidade de códigos que começam com 9 OU terminam com 9.

Assim,

1. Códigos como 9475, 9030, 9256 e 9710, por exemplo, que **só começam** em 9 são considerados códigos de emergência;
2. Códigos como 0239, 3049, 2489 e 2539 que **só terminam** em 9 são considerados códigos de emergência; e
3. Códigos como 9429, 9379, 9009 e 9549 que **começam e terminam** em 9 são considerados códigos de emergência.

Isso mostra, novamente, como o operador lógico OU difere-se do operador lógico E: se o problema pedisse a quantidade de códigos que começam com 9 E terminam com 9, apenas o grupo (3) seria considerado válido.

Tendo esclarecido isso, vamos calcular a quantidade de códigos pertencentes a cada um dos três grupos (1), (2) e (3).

(1) Códigos que só começam em 9

Dos quatro dígitos do código, o primeiro já está definido para que ele faça parte do grupo: o primeiro dígito deve ser o 9 (1 opção).

A partir daí, as próximas duas posições podem ser ocupadas por qualquer dígito de 0 a 9. Logo, (10 opções) no segundo dígito e (10 opções) no terceiro dígito.

E, por fim, a quarta e última posição pode ser ocupada por qualquer dígito de 0 a 8, já que o dígito 9 nessa posição seria contrário a regra do grupo (1) de só começar com o 9. Assim, (9 opções).

Assim, existem $1 \times 10 \times 10 \times 9 = 900$ códigos do grupo (1).

(2) Códigos que só terminam em 9

No caso dos códigos que só terminam em 9, pode-se fazer um raciocínio análogo ao que foi feito no grupo (1), indicando a quantidade de opções disponíveis em cada posição e efetuando a multiplicação para chegar à quantidade total de códigos.

No entanto, também é possível pensar que todo código que **só começa em 9**, tendo a ordem dos seus quatro dígitos invertida, dá origem a um código que **só termina em 9**. Portanto, a quantidade de códigos pertencentes ao grupo (2) deve ser igual à quantia calculada no grupo (1), mesmo se recorrermos ao método da multiplicação, totalizando **900 códigos** do grupo (1).

(3) Códigos que começam e terminam em 9

Nesse terceiro grupo, tanto o primeiro quanto o quarto dígito estão definidos: devem ser o '9'.

Dessa maneira, resta escolher os valores das posições do meio, que podem, cada um, assumir qualquer dígito de 0 a 9. Assim, **(10 opções)** para a segunda posição e **(10 opções)** para a terceira posição. Totalizando $10 \times 10 = 100$ códigos do grupo (3)

Por fim, como os códigos **OU** pertencem ao grupo 1, **OU** pertencem ao grupo 2, **OU** pertencem ao grupo 3, sem existir nenhum código que pertence aos dois grupos ao mesmo tempo, basta somar a quantidade de elementos de cada grupo para obter o resultado final.

Existem, portanto, $900 + 900 + 100 = 1900$ **códigos de emergência**.



5) André A. volta ao restaurante M.G. em um dia especial no qual o restaurante oferece suas três opções de salada tradicionais (vinagrete, salada mista, e salpicão), suas duas opções de carne tradicionais (bife de boi e filé de frango), e, além disso, três opções de sobremesa (brigadeiro, canjicão e arroz doce). O dono do estabelecimento, visando estimular a alimentação saudável, estabelece que para poder comprar a sobremesa, o cliente obrigatoriamente precisa ter comprado também uma

das opções de salada. Além disso, um cliente só pode comprar, no máximo, uma opção de salada, uma opção de carne e uma opção de sobremesa, não precisando comprar um tipo de prato de cada grupo desde que as outras regras se cumpram. Sabendo que não existem quaisquer regras adicionais para o pedido do cliente, de quantas formas André pode fazer o seu pedido?

Resolução:

Inicialmente, sabendo que existem três grupos de pratos (saladas, carnes, e sobremesas) e que André não precisa, necessariamente, pedir um prato de cada grupo, vamos montar uma tabela com todas as configurações possíveis de pedido:

Tipo de pedido	Grupo de Prato		
	Salada	Carne	Sobremesa
1	×	×	×
2	✓	×	×
3	×	✓	×
4	×	×	✓
5	✓	✓	×
6	✓	×	✓
7	×	✓	✓
8	✓	✓	✓

Assim, como André OU faz o tipo de pedido 1, OU faz o tipo de pedido 2, OU faz o tipo de pedido 3, ..., OU faz o tipo de pedido 8, basta calcular de quantas maneiras diferentes ele pode fazer cada tipo de pedido, somando os resultados ao final para obter a quantidade total de pedidos.

- 1) O tipo de pedido 1 na verdade não é um pedido, tendo em vista que o cliente não pede nenhuma das opções do cardápio, logo (0 opções).
- 2) O tipo de pedido 2 é pedir exatamente uma dentre as 3 opções de salada, somente. Logo, (3 opções).

3) O tipo de pedido 3 é pedir exatamente uma dentre as 2 opções de carne, somente. Logo, (2 opções).

4) O tipo de pedido 4 é inválido de acordo com as regras do restaurante, visto que não se pode pedir sobremesa sem que se tenha pedido salada.

5) No tipo de pedido 5, escolhe-se uma dentre 3 opções de salada e uma dentre 2 opções de carne, totalizando $3 \times 2 =$ **(6 opções)**.

6) No tipo de pedido 6, escolhe-se uma dentre 3 opções de salada e uma dentre 3 opções de sobremesa, totalizando $3 \times 3 =$ (9 opções).

7) O tipo de pedido 7 é inválido de acordo com as regras do restaurante, visto que não se pode pedir sobremesa sem que se tenha pedido salada.

8) No tipo de pedido 8, escolhe-se uma dentre 3 opções de salada, uma dentre 2 opções de carne e uma dentre 3 opções de sobremesa, totalizando $3 \times 2 \times 3 =$ (18 opções)

Assim, conclui-se que, nesse dia especial, existem $3 + 2 + 6 + 9 + 18 =$ **38 opções de pedidos.**

D.3 Princípio da Inclusão-Exclusão - Lidando com interseções

No capítulo anterior, você aprendeu a fazer uso do operador lógico E e do operador lógico OU. O uso do operador lógico E foi completamente ensinado no capítulo anterior, no entanto, para o operador lógico OU, existe uma importante exceção que será ensinada neste capítulo: o Princípio da Inclusão-Exclusão.

Vamos primeiro, tentar resolver um problema que envolve essa exceção do operador lógico OU somente com as ferramentas aprendidas no D.2, depois vamos apontar o erro dessa tentativa e construir o Princípio da Inclusão-Exclusão a partir daí.

Ex. 1: Entre 1 e 20, existem

- 5 números múltiplos de 4, são eles (4, 8, 12, 16, e 20); e
- 6 números múltiplos de 3, são eles (3, 6, 9, 12, 15, e 18).

Sabendo disso, quantos números existem entre 1 e 20 que são múltiplos de 4 OU são múltiplos de 3.

Resolução: Se tentarmos resolver esse problema pensando apenas na lógica ensinada no capítulo anterior, ou seja, na lógica que associa o operador lógico **OU** à soma dos elementos, iríamos dizer que existem $5 + 6 = 11$ números que são múltiplos de 4 **OU** múltiplos de 3 nesse intervalo.

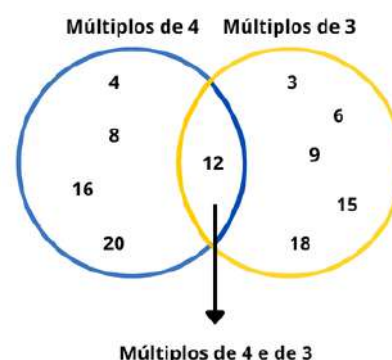
No entanto, se de fato contarmos os números que são múltiplos de 4 ou múltiplos de 3 nesse intervalo, chegamos à seguinte tabela:

Número	Múltiplo?	Número	Múltiplo?
1	×	11	×
2	×	12	Múltiplo de 3 e de 4
3	Múltiplo de 3	13	×
4	Múltiplo de 4	14	×
5	×	15	Múltiplo de 3
6	Múltiplo de 3	16	Múltiplo de 4
7	×	17	×
8	Múltiplo de 4	18	Múltiplo de 3
9	Múltiplo de 3	19	×
10	×	20	Múltiplo de 4

Ou seja, só existem 10 números no intervalo que são múltiplos de 4 **OU** múltiplos de 3, são eles 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, e 20. Por que então a soma indicou que deveriam haver 11 números assim?

Bom, a chave para responder essa pergunta está em observar que o 12 faz parte, ao mesmo tempo, do grupo de múltiplos de 4 e do grupo de múltiplos de 3. Quando um elemento faz parte dos dois grupos analisados, dizemos que ele faz parte da interseção dos dois grupos.

Veja o **Diagrama de Venn** ao lado:



Assim, quando somamos a quantidade de elementos que são múltiplos de 4 com a quantidade de elementos que são múltiplos de 3, o número 12 é contado duas vezes, porque ele está, ao mesmo tempo, entre os múltiplos de 4 e entre os múltiplos de 3.

Como queremos contar o número 12 apenas uma vez, precisamos subtrair 1 ao resultado. E, de fato, $11 - 1 = 10$, que é a resposta correta para a pergunta.

Como saber quando fazer o uso comum do operador lógico OU, e quando fazer o uso do Princípio da Inclusão-Exclusão?

No D.2, sempre que usamos o operador OU, os problemas foram construídos de forma que as duas possibilidades nunca aconteciam ao mesmo tempo: escolher uma salada ou uma carne, no problema (1); ir por uma rota ou por outra, no problema (2). Nesses casos, bastava somar as quantidades de cada possibilidade.

Mas nem todo OU funciona assim: às vezes, as duas condições podem acontecer simultaneamente em um mesmo elemento. Por exemplo, ao escolher um cartão numerado que seja múltiplo de 3 ou múltiplo de 4, o número 12 satisfaz as duas condições ao mesmo tempo — ele não é "só múltiplo de 3" nem "só múltiplo de 4", ele é as duas coisas.

Se simplesmente somarmos a quantidade de múltiplos de 3 com a quantidade de múltiplos de 4, o número 12 (e outros como ele) será contado duas vezes, inflando o resultado. Nesses casos, é preciso subtrair do resultado o número de elementos que fazem parte dos dois grupos ao mesmo tempo, para que eles sejam contados uma única vez e não duas vezes.

Note que, nem sempre no Princípio da Inclusão-Exclusão, o valor subtraído vai ser 1, isso foi só para o caso específico do Ex. 1. O que precisamos lembrar de fazer é subtrair os valores que fazem parte da interseção, ou seja, fazem parte dos dois grupos ao mesmo tempo.

Agora é sua vez, pratique o Princípio da Inclusão-Exclusão nos seguintes problemas!

1) Em uma sessão de cinema com 60 espectadores, sabe-se que 25 pessoas compraram pipoca, 18 pessoas compraram refrigerante, e 8 pessoas compraram os dois itens.

a) Quantas pessoas compraram pipoca ou refrigerante (pelo menos um dos dois)?



b) Quantas pessoas não compraram nem pipoca nem refrigerante?

Resolução:

a) Vamos montar o Diagrama de Venn, no qual um dos círculos representa o grupo de pessoas que compraram pipoca e o outro círculo representa o grupo de pessoas que compraram refrigerante.

- O problema disse que 8 pessoas compraram pipoca **E** refrigerante, então sabemos que a interseção dos dois círculos deve valer 8;
- Se 25 pessoas compraram pipoca, e 8 já estão na interseção, faltam $25 - 8 = 17$ pessoas fora da interseção, no grupo da pipoca; e
- Se 18 pessoas compraram refrigerante, e 8 já estão na interseção, faltam $18 - 8 = 10$ pessoas fora da interseção, no grupo do refrigerante.



Assim, o número de pessoas que compra **OU** pipoca, **OU** refrigerante é $17 + 8 + 10 = 35$ pessoas.

Outra resolução, é fazer a soma do número de pessoas que compra pipoca com o número de pessoas que compra refrigerante, e depois subtrair a interseção. Chegando a $25 + 18 - 8 = 35$ pessoas. Ambas as resoluções estão corretas.

b) Se 60 pessoas vão à sessão de cinema e 35 delas fazem uma das compras (pipoca ou refrigerante), então temos $60 - 35 = 25$ pessoas que não compram nem pipoca nem refrigerante.

2) No aulão de final de ano, o Time Venn recebe as matrículas de 200 alunos, os quais são numerados de 1 a 200. Um aluno recebe uma carteirinha especial se o número de sua matrícula for múltiplo de 6 ou múltiplo de 8. Quantos alunos recebem essa carteirinha especial?

Resolução:

Sabemos que, para resolver esse problema, precisamos:

- Somar a quantidade de múltiplos de 6 no intervalo;
- Somar a quantidade de múltiplos de 8 no intervalo; e
- Subtrair a quantidade de múltiplos de 6 e de 8 ao mesmo tempo.

i) Múltiplos de 6 no intervalo

Sabemos, também, que os múltiplos de 6 podem ser representados como **6n**. O primeiro múltiplo de 6 no intervalo é o próprio **6**, que pode ser escrito como 6×1 . O último múltiplo de 6 no intervalo é o **198**, que pode ser escrito como 6×33 .

Assim, existem **33** múltiplos de 6 entre 1 e 200.

ii) Múltiplos de 8 no intervalo

Sabemos que os múltiplos de 8 podem ser representados como **8n**. O primeiro múltiplo de 8 no intervalo é o próprio **8**, que pode ser escrito como 8×1 . O último múltiplo de 8 no intervalo é o **200**, que pode ser escrito como 8×25 .

Assim, existem **25** múltiplos de 8 entre 1 e 200.

iii) Múltiplos de 6 e de 8 no intervalo

Vamos agora pensar nos números que são múltiplos de 6 e de 8 ao mesmo tempo. São eles: 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, e 192. Ou seja, 8 múltiplos de 6 e de 8.

Portanto, temos que $33 + 25 - 8 = \mathbf{50 \text{ alunos}}$ recebem a carteirinha especial.

Nota: É importante destacar que os números múltiplos de 6 e de 8 ao mesmo tempo não são aleatórios. Um número será múltiplo de 6 e de 8 ao mesmo tempo se for múltiplo do MMC (Mínimo Múltiplo Comum) de 6 e de 8. Nesse caso, $\text{MMC}(6, 8) = 24$, então os múltiplos de 6 e de 8, ao mesmo tempo, serão os múltiplos de 24.

Como os múltiplos de 24 podem ser representados como **24n**, o primeiro múltiplo de 24 no intervalo é $24 \times 1 = 24$, e o último é $24 \times 8 = 192$. Totalizando 8 múltiplos de 6 e de 8 no intervalo.

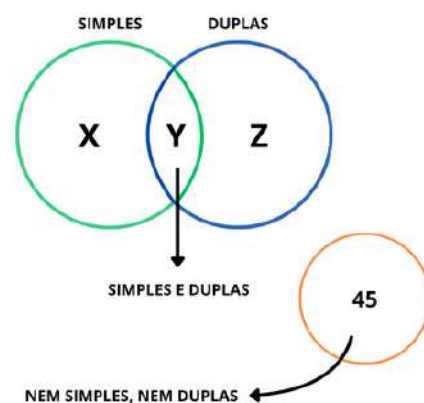


3) Em um clube com 90 sócios, 34 já venceram o torneio de tênis de simples em algum ano, e 21 já venceram o torneio de duplas. Sabe-se que 45 sócios nunca venceram nenhum dos dois torneios. Quantos sócios já venceram os dois torneios (simples e duplas)?

Resolução:

Vamos montar o Diagrama de Venn no qual um círculo representa os sócios que já venceram o torneio de tênis simples e o outro representa os sócios que já venceram o torneio de duplas, a partir das seguintes informações.

- Existe um total de 90 sócios, dos quais 45 nunca venceram nenhum dos dois torneios, logo,
 $90 - 45 = 45$ sócios já venceram **pelo menos um** dos dois torneios;
- Vamos chamar de X o número de sócios que ganharam **somente** o torneio de tênis simples;
- Vamos chamar de Z o número de sócios que ganharam **somente** o torneio de duplas; e
- Vamos chamar de Y o número de sócios que venceram **ambos** os torneios.



Como o total de sócios que já venceram algum torneio é 45, então
i) $X + Y + Z = 45$

Como o total de sócios que já venceram o torneio simples é 34, então
ii) $X + Y = 34$

Como o total de sócios que já venceram o torneio de duplas é 21, então
iii) $Y + Z = 21$

Comparando (i) e (ii), temos que $34 + Z = 45$, logo, $Z = 11$.

Comparando (i) e (iii), temos que $X + 21 = 45$, logo, $X = 24$.

Inserindo esses valores de X e de Z em (i), temos que,

$$24 + Y + 11 = 45$$

$$Y + 35 = 45$$

$$Y = 10$$

Portanto, existem **10** sócios que venceram o torneio simples E o torneio de duplas.

4) Considere todas as formas possíveis de embaralhar as 5 letras da palavra RIVAL (sem repetição de letras). Quantas desses embaralhamentos têm a letra R na primeira posição ou a letra L na última posição?

Resolução:

Novamente, sabemos que, para obter a resposta, precisamos

- Somar a quantidade de embaralhamentos que têm o R na primeira posição;
- Somar a quantidade de embaralhamentos que têm o L na última posição; e
- Subtrair a quantidade de embaralhamentos que têm o R na primeira posição E têm o L na última posição, já que esses foram contados duas vezes.

i) Quantidade de embaralhamentos que têm o R na primeira posição

Fixando-se o R na primeira posição, podemos organizar as outras 4 letras de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras, de acordo com o PFC.

ii) Quantidade de embaralhamentos que têm o L na última posição

Fixando-se o L na última posição, podemos organizar as outras 4 letras de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras, de acordo com o PFC.

iii) Quantidade de embaralhamentos que têm o R na primeira posição E têm o L na última posição

Fixando se o R na primeira posição e o L na última posição, as 3 letras do meio podem ser organizadas de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras, de acordo com o PFC.

Assim, o número de embaralhamentos que têm o R na primeira posição **OU** têm o L na última posição é $24 + 24 - 6 = 42$.

D.4 Contagem por casos

A partir de agora, você vai aprender a resolver problemas que também utilizam o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), porém com raciocínios adicionais. O primeiro desses casos se dá quando algum elemento da formação do evento apresenta uma condição especial, quebrando a lógica comum de formação do evento. Nesses casos, é preciso dividir o problema em casos menores onde a condição especial não é mais relevante. Veja alguns exemplos abaixo.

1) Maria Antônia gosta de decorar seu quarto com muitas cores. Em um determinado dia, ela decide que vai pintar as 4 paredes do seu quarto, utilizando 3 cores: preto, roxo e laranja. Porém existe uma



condição: para garantir que o quarto vai ter uma aparência muito colorida, Maria Antônia decide que paredes adjacentes* não podem ter cores iguais. De quantas formas ela pode pintar seu quarto?

*adjacentes: lado a lado.

Resolução:

Vamos, primeiro, tentar resolver esse problema com as ferramentas comuns do Princípio Fundamental da Contagem, para provar que a divisão em casos é necessária.

Começando com a parede P1 do quarto, pode-se escolher qualquer uma das 3 cores disponíveis, logo, 3 opções. Vamos imaginar que PRETO foi escolhido (P1 = PRETO).

Na próxima parede, P2, das 3 cores disponíveis, a única que não pode ser escolhida é a que já foi escolhida em P1. De fato, no exemplo imaginário, se P1 é PRETO, então P2 pode ser ROXO ou LARANJA, mas não pode ser PRETO. Logo, há 2 opções disponíveis. Vamos imaginar que ROXO foi escolhido (P2 = ROXO).

Na terceira parede, P3, das 3 cores disponíveis, a única que não pode ser escolhida é a que acabou de ser escolhida em P2. Novamente, no exemplo imaginário, se P2 é ROXO, então P3 pode ser PRETO ou LARANJA, mas não pode ser ROXO. Logo, 2 opções disponíveis. Vamos imaginar que LARANJA foi escolhido (P3 = LARANJA).

Na quarta e última parede é que a limitação do PFC é exposta. Como P4 é adjacente a P1 e a P3, ela não pode ter nem a cor usada em P1, nem a cor usada em P4.

Nesse momento, pode ser tentador dizer que existe somente uma possibilidade de cor para pintar P4. De fato, no nosso exemplo imaginário em que P1 = PRETO e P2 = LARANJA, só restou a cor ROXA para ser usada em P4 sem desobedecer a condição de Maria Antônia, mas esse não é necessariamente o caso sempre.

É possível, por exemplo, formar um outro exemplo imaginário em que:

- **P1 = PRETO**
- **P2 = LARANJA**
- **P3 = PRETO**

Nesse caso, P4 pode ser pintado tanto de LARANJA quanto de ROXO, já que as cores usadas em P1 e em P3 são iguais.

Portanto, percebe-se que é necessário dividir o problema em dois casos.

- i) As cores de P1 e de P3 são diferentes; e
- ii) As cores de P1 e de P3 são iguais.

i) $P1 \neq P3$

Se as cores de P1 e P3 são diferentes, escolhe-se uma dentre 3 cores para P1, depois escolhe-se uma dentre as duas cores que não foram usadas em P1 para pintar P3. A partir daí, como P2 é adjacente a P1 e a P3, a cor de P2 não pode ser nem a de P1 nem a de P3. Como a cor de P1 é diferente da de P3, resta só uma para pintar P2. Da mesma forma, resta somente uma cor para pintar P4: a mesma que foi usada em P1.

Assim, nesse caso, pode-se pintar o quarto de $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ maneiras distintas.

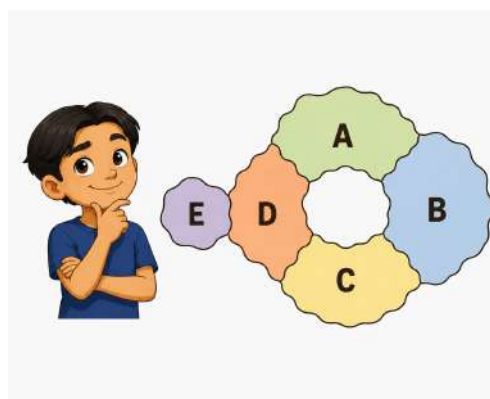
ii) $P1 = P3$

Se as cores de P1 e P3 são iguais, escolhe-se uma dentre 3 cores para P1, e, automaticamente, a cor de P3 está escolhida, pois deve ser esta mesma usada em P1. A partir daí, como P2 é adjacente a P1 e a P3, dentre as 3 cores disponíveis, essa única usada em P1 e em P3 não pode ser usada em P2, sobrando 2 opções. O mesmo vale para P4, pode ser pintada com qualquer uma das 2 cores que não são a que foi usada em P1 e em P3.

Logo, nesse caso, pode-se pintar o quarto de $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ maneiras distintas.

Por fim, como **OU** o quarto é pintado da forma (i) **OU** é pintado da forma (ii), então soma-se a quantidade de formas que o quarto pode ser pintado em cada caso, resultando em $6 + 12 = 18$ formas de pintar o quarto.

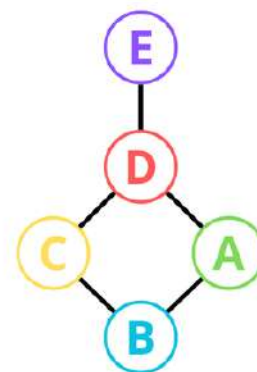
2) Pedro L. vai montar um mapa para a sua aula de Geopolítica, no mapa, como é mostrado abaixo, existem 5 países: A, B, C, D e E. Os países A, B, C e D estão dispostos de modo a fazerem fronteira com outros 2 países desse grupo. Já o país E só faz fronteira com o país D. Usando somente as cores vermelho, azul e verde, de quantas formas Pedro L. pode pintar o seu mapa sem que países que fazem fronteira sejam pintados da mesma cor.



Resolução:

Inicialmente, pela imagem e pela descrição do enunciado, é possível montar um diagrama que representa os países e as fronteiras da situação hipotética, sem perda de quaisquer informações. Dessa maneira, chega-se ao seguinte grafo:

Nesse tipo de questão, embora existam diversas formas de chegar à resolução, o ideal é começar a atacar o problema a partir do ponto de maior complicação. Nesse caso, o ponto de maior complicação é aquele país que influencia a escolha da cor do maior número de outros países, e, semelhantemente, tem a sua própria cor influenciada pelo maior número de outros países caso a escolha não se inicie por ele. Assim, o país D pode ser considerado o ponto de maior complicação porque faz fronteira com o maior número de países (A, C e E).



Tendo sido explicado porque vamos começar a escolha de cores a partir do país D, vamos agora tentar preencher a cor dos demais países seguindo o fluxo comum do Princípio Fundamental da Contagem. Veremos que vamos chegar em uma situação muito semelhante à do problema anterior (Pintando o quarto da Maria Antônia), evidenciando que a divisão por casos é novamente necessária.

O país D pode assumir qualquer uma das três cores disponíveis, logo, temos 3 opções. No exemplo imaginário, vamos escolher o vermelho (D = VERMELHO).

Partindo para o país A, ele só não poderá assumir aquela cor que foi escolhida para colorir o país D. Logo, temos 2 opções para o país A. No exemplo, vamos escolher a cor Verde (A = VERDE).

Em terceiro lugar, no país B, ele pode assumir qualquer cor, exceto aquela que foi usada para o seu vizinho, o país A. Logo, existem também 2 opções para colorir B. No exemplo imaginário, vamos escolher a cor Azul (B = AZUL).

Desse modo, no país C, somos levados a pensar que só existe uma opção de cor: “Ora, se o VERMELHO foi usado no país D e o AZUL no país B, resta apenas o VERDE para o país C”. Mas precisamos lembrar novamente, que em uma outra sequência de escolhas igualmente válidas haveriam duas cores disponíveis para pintar o país C, por exemplo:

- D = VERMELHO
- A = VERDE
- B = VERMELHO

Nesse novo exemplo, tanto o VERDE quanto o AZUL são cores possíveis para colorir C. Assim percebe-se a necessidade de dividir o problema em dois casos:

- i) As cores de D e de B são diferentes; e
- ii) As cores de D e de B são iguais.

i) $D \neq B$

Se as cores de D e de B são diferentes, escolhe-se uma dentre as 3 disponíveis para colorir o país D (3 opções), e, depois, restam-se duas escolhas para a cor do país B, já que ele, obrigatoriamente, não pode ter a mesma cor de D (2 opções).

Com D e B coloridos com cores diferentes, resta apenas uma cor para o país A, a única das três que não foi usada nem em D nem em B (1 opção). O mesmo vale para o país C (1 opção).

Por fim, para o país E, basta que a sua cor não seja igual à usada no país D, que é o seu único vizinho, existindo então 2 cores possíveis (2 opções).

Logo, no caso (i), o mapa pode ser pintado de $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 =$
12 maneiras.

ii) $D = B$

Se as cores de D e de B são iguais, escolhe-se uma dentre as 3 disponíveis para colorir o país D (**3 opções**), e, depois, automaticamente a cor do país B está definida, já que deve ser a mesma que foi usada para o país D.

Com D e B coloridos com a mesma cor, restam duas cores possíveis para o país A (**2 opções**). O mesmo vale para o país C (**2 opções**).

Por fim, para o país E, basta que a sua cor não seja igual à usada no país D, que é o seu único vizinho, existindo então 2 cores possíveis (**2 opções**).

Logo, no caso (ii), o mapa pode ser pintado de $3 \times 2 \times 2 \times 2 =$ **24 maneiras.**

Portanto, como **OU** o mapa é pintado seguindo a regra (i), **OU** é pintado seguindo a regra (ii), soma-se a quantidade de maneiras de pintar o mapa em cada caso para obter o resultado total. Chegando-se, assim, a $12 + 24 =$ **36 maneiras** de pintar o mapa.

3) Leonardo T. gosta de descobrir a senha de cofres antigos no seu tempo livre.

Estudando um determinado cofre cuja senha têm 3 dígitos, Leonardo decifrou que a sua senha segue a seguinte regra:

- O primeiro dígito é par; e
- A soma dos dois outros dígitos deve ser par.

Sabendo disso, quantas sequências de 3 dígitos podem, possivelmente, ser a senha do cofre analisado pelo rapaz?



Resolução:

Vamos representar a senha do cofre como ABC, em que A, B, e C são o primeiro, segundo e terceiro dígito da senha, respectivamente. Nesse sistema, A deve ser par, e B + C também deve ser par.

Como você já deve ter visto no capítulo de Álgebra, a paridade da soma de dois números X e Y segue a seguinte regra:

X	Y	X + Y
Par	Par	Par
Par	Ímpar	Ímpar
Ímpar	Par	Ímpar
Ímpar	Ímpar	Par

Assim, para termos B + C par, podemos OU ter B par e C par, OU ter B ímpar e C ímpar, cabendo a divisão nesses dois casos.

i) B é par e C é par

No primeiro caso, B pode ser qualquer um dos dígitos (0, 2, 4, 6 ou 8) e C também pode ser qualquer um dos dígitos (0, 2, 4, 6, 8), ou seja, 5 opções para B e 5 opções para C. Como B é par **E** C é par, então existem $5 \times 5 = \mathbf{25 \text{ maneiras}}$ de fazer B par e C também par.

ii) B é ímpar e C é ímpar

No segundo caso, B pode ser qualquer um dos dígitos (1, 3, 5, 7 ou 9) e C também pode ser qualquer um dos dígitos (1, 3, 5, 7 ou 9), ou seja, 5 opções para B e 5 opções para C.

Como B é ímpar **E** C é ímpar, então existem $5 \times 5 = \mathbf{25 \text{ maneiras}}$ de fazer B ímpar e C também ímpar.

Como para termos B + C par podemos **OU** ter B par e C par, **OU** ter B ímpar e C ímpar, então existem $25 + 25 = \mathbf{50 \text{ maneiras}}$ de fazer B + C ser par.

Depois, como além de $B + C$ ser par, A também precisa ser par, conclui-se que A deve ser um dos dígitos (0, 2, 4, 6 ou 8), havendo também 5 opções para A .

Portanto, como precisamos ter $B + C$ par e também A par, existem $50 \times 5 = 250$ possíveis senhas para o cofre.

4) Gabriela e Margarida foram encarregadas de formar duas duplas, contendo elas, para a competição de Programação da faculdade em que estudam. O professor estabeleceu as seguintes regras para a formação das duas duplas:

- Se Gabriela e Margarida ficam em duplas diferentes, o segundo membro de cada dupla deve ser um menino; e
- Se Gabriela e Margarida ficam na mesma dupla, a outra dupla deve ser composta por um menino e uma menina.



Sabendo que na classe existem 4 meninos e 5 meninas além de Gabriela e Margarida, de quantas maneiras diferentes Gabriela e Margarida podem formar duplas?

Resolução:

Nessa situação-problema, a divisão por casos é mais natural, como já foi explicitada nas regras estabelecidas pelo professor.

i) Gabriela e Margarida fazem parte de duplas diferentes

Nesse caso, é preciso preencher ambas as duplas com um menino diferente, conforme as orientações do professor. Como existem **4 opções** de meninos para completar a dupla de Gabriela e **3 opções** de meninos para completar a dupla de Margarida, totalizam-se $4 \times 3 = 12$ **formações de duplas** possíveis.

ii) Gabriela e Margarida fazem parte da mesma dupla

Nesse segundo caso, é preciso formar a outra dupla com um menino e uma menina. Existem **4 opções** para a posição do menino e **5 opções** para a posição da menina. Assim, totalizam-se $4 \times 5 = 20$ **formações de duplas** possíveis.

Por fim, como **OU** Gabriela e Margarida fazem parte de duplas diferentes, **OU** fazem parte da mesma dupla, então existem $12 + 20 = 32$ **maneiras** de formar as duplas.

5) A emissora Time Venn TV transmite os seus programas educacionais do seu estúdio até a casa dos telespectadores por diversas vias diferentes. Existem três antenas retransmissoras que podem emitir o sinal do estúdio até um satélite, e, depois, cinco receptores diferentes que captam o sinal do satélite, direcionando para a casa do telespectador. Além desse caminho via satélite, a emissora mantém um único canal de fibra óptica independente, do estúdio até a casa do telespectador. De quantas maneiras diferentes o sinal pode chegar até a casa do telespectador?

Resolução:

A chave para resolver esse problema é entender que existem duas vias principais para a transmissão do sinal do estúdio até a casa, pelo que foi descrito pelo enunciado: **OU** o sinal passa pela via do satélite, **OU** passa pela fibra óptica. Dessa forma, cabe a divisão em dois casos.

i) O sinal é transmitido pela via do satélite

Nesse caso, o sinal pode ir do estúdio até o satélite utilizando 1 dentre as 3 antenas retransmissoras disponíveis (**3 opções**) e pode ser captado a partir do satélite até a casa do telespectador por meio de 1 dentre as 5 antenas receptoras disponíveis (**5 opções**).

Como o sinal precisa passar pela antena retransmissora **E** passar pela antena receptora, existem $3 \times 5 = 15$ **maneiras** do sinal ser transmitido pela via do satélite.

ii) O sinal é transmitido pela fibra óptica

Como o enunciado destacou, essa via é única, ligando o estúdio à casa por um único caminho. Assim, só existe **1 maneira** do sinal ser transmitido pela via da fibra óptica.

Por fim, como o sinal **OU** passa pela via do satélite, **OU** passa pela fibra óptica, totalizam-se $15 + 1 = 16$ **caminhos possíveis**.

Nos cinco problemas deste capítulo, seguimos sempre o mesmo caminho: tentamos aplicar o Princípio Fundamental da Contagem diretamente, e em algum momento percebemos que **uma das escolhas não tinha sempre o mesmo número de opções** — dependia de uma decisão tomada antes (a quarta parede do quarto da Maria Antônia, o quarto país do mapa de Pedro L., ou a paridade dos dígitos que formam a senha do cofre de Leonardo T.). Sempre

que isso acontece, a saída é a mesma: **dividir o problema em casos que não se sobrepõem**, resolver cada caso separadamente com o **PFC** (agora sim, com o número de opções fixo em cada etapa) e, ao final, somar os resultados de todos os casos — afinal, cada situação só pode acontecer de uma dessas formas, nunca de duas ao mesmo tempo. Essa é a mesma ideia do **OU** do capítulo anterior, só que agora os "casos" não vêm prontos no enunciado: é você quem precisa enxergá-los antes de começar a contar. Esse é, talvez, o passo mais importante de toda a Análise Combinatória: antes de multiplicar qualquer número, pergunte-se se o problema pode mesmo ser resolvido de uma só vez, ou se esconde, dentro dele, situações diferentes que precisam ser tratadas em separado.

D.5 Escolher x Ordenar: quando a ordem importa?

Você sabe explicar qual é a diferença, do ponto de vista da Análise Combinatória, entre os dois problemas abaixo:

1) A partir de um grupo de 10 pessoas, de quantas maneiras diferentes é possível formar um pódio (1o lugar, 2o lugar, e 3o lugar)?

2) A partir de um grupo de 10 pessoas, de quantas maneiras diferentes é possível escolher 3 delas?

As ferramentas aprendidas até aqui, te deixaram suficientemente equipados para resolver o problema (1): ora, dentre as 10 pessoas, é preciso escolher uma para ocupar o 1o lugar do pódio (**10 opções**), uma das restantes para ocupar o 2o lugar do pódio (**9 opções**) e uma das que sobraram para ocupar o 3o lugar do pódio (**8 opções**) totalizando $10 \times 9 \times 8 = 720$ maneiras de formar o pódio.

Esse raciocínio é completamente válido para o problema (1), no entanto, se mostra insuficiente para o problema (2).

Para demonstrar isso, vamos supor um exemplo imaginário em que, dentre as 10 pessoas, a primeira selecionada é Ana, o segundo selecionado é Bernardo e o terceiro selecionado é Cássio. Vamos agora supor um segundo exemplo imaginário em que, dentre as 10 pessoas, o primeiro selecionado é Cássio, a segunda selecionada é Ana e o terceiro selecionado é Bernardo.

A pergunta que fica é: esses dois exemplos imaginários são diferentes entre si?

Bom, a resposta é depende! Para o problema (1), esses dois exemplos são totalmente diferentes, tendo em vista que a ordenação das pessoas (a posição que cada pessoa ocupa no pódio de três lugares) varia de um exemplo pro outro. Já para o problema (2), os dois exemplos devem ser tratados como totalmente iguais, uma vez que o único objetivo desse segundo problema é escolher três pessoas e, independentemente da ordem, as três pessoas escolhidas ao final dos exemplos foram as mesmas.

Assim, chegamos à uma conclusão fundamental: alguns problemas exigem só escolher elementos a partir de um conjunto maior, não sendo relevante a ordem em que os elementos são escolhidos, já outros exigem ordenar elementos, importando a ordem em que

eles são escolhidos.

No geral, sempre que o problema atribuir uma distinção de função, posição ou aparência dos elementos que serão escolhidos, a ordem importa, já que a partir de um mesmo grupo de elementos pode-se obter uma configuração final diferente.

Seguem alguns exemplos de problemas no qual a ordem importa e os seus contrapontos nos quais a ordem não importa:

Ordem importa	Ordem não importa
Escolha 3 pessoas para formar uma equipe na qual uma pessoa é o presidente, outra é o vice-presidente e outra é o tesoureiro.	Escolha 3 pessoas para formar um grupo de representantes de turma.
Dentre 5 pessoas de uma casa, de quantas maneiras pode-se escolher uma para cozinhar, uma para limpar e uma para tirar o lixo?	Dentre 5 pessoas de uma casa, de quantas maneiras pode-se escolher 3 para dividirem as tarefas domésticas?
A partir de uma pilha de 10 livros, quantas diferentes sequências de 5 livros é possível formar?	A partir de uma pilha de 10 livros, de quantas maneiras diferentes é possível escolher 5 para levar em uma viagem?
Em um grupo de 10 atletas, de quantas maneiras é possível distribuir uma medalha de ouro, uma de prata e uma de bronze?	Em um grupo de 10 atletas, de quantas maneiras é possível escolher 3 para formar a equipe principal?

Tendo sido exemplificado que em alguns casos a ordem importa e em outros não, é preciso saber resolver problemas análogos ao problema (2), nos quais a ordem não importa. Pensando no problema (1), em que escolhe-se o pessoas para compor um pódio, já sabemos que temos 720 disposições diferentes de pessoas nessas 3 posições diferentes do pódio. Vamos então usar esse resultado do problema (1) para chegar ao resultado do problema (2). Ora, o problema (2) nada mais é do que o problema (1) porém desconsiderando a ordem em que as pessoas estão dispostas no pódio, assim, vamos pensar de quantas formas diferentes um mesmo grupo de três pessoas diferentes pode estar disposta no pódio.

Testando todas as disposições diferentes de **Ana**, **Bernardo** e **Cássio** no pódio, chegamos à seguinte tabela:

Primeiro Lugar	Segundo Lugar	Terceiro Lugar
Ana	Bernardo	Cássio

Ana	Cássio	Bernardo
Bernardo	Ana	Cássio
Bernardo	Cássio	Ana
Cássio	Ana	Bernardo
Cássio	Bernardo	Ana

Ou seja, essas 3 pessoas podem ser dispostas de **6 maneiras** diferentes no pódio. Assim, para cada grupo de três pessoas que é uma resposta para o problema (2), formam-se 6 respostas diferentes para o problema (1), que considera a ordem das pessoas. Logo, agrupando-se os **720** pódios distintos obtidos como resultado do problema (1) de **6 em 6**, isto é, de acordo com quais são as três pessoas presentes no pódio, chega-se à conclusão de que existem $\frac{720}{6} =$ **120 trios** diferentes a partir de um grupo de 10 pessoas.

É válido, ainda, destacar que o número 6 não surgiu de forma aleatória nesse problema. Ora, tendo sido fixado quais são as três pessoas, a quantidade de pódios diferentes que podem ser formados por elas se dá escolhendo-se uma dentre as três para ocupar o 1o lugar (**3 opções**), uma das duas que restaram para o 2o lugar (**2 opções**), e a última é deixada para o 3o lugar (**1 opção**). Logo, pode-se formar $3 \times 2 \times 1 =$ **6 pódios diferentes** a partir de um grupo de 3 pessoas.

Agora é sua vez! Fique atento às diferenças entre problemas que consideram a ordenação dos elementos e problemas que desconsideram a ordem dos elementos nas questões a seguir.

1) No evento de final de ano do Time Venn, escolhe-se dentre um grupo de 15 membros uma dupla para cantar karaokê. Sabendo que qualquer integrante do time pode formar dupla com qualquer outro integrante do time, de quantas maneiras diferentes essas duplas podem ser formadas?

Resolução:

Como o problema não estabeleceu nenhuma distinção de função, posição ou aparência entre os membros escolhidos para formar a dupla, pode-se assumir que escolher primeiro o membro A e depois o membro B é equivalente a escolher primeiro o membro B e depois o membro A. Em outras palavras, **a ordem não importa**.

O primeiro membro da dupla pode ser qualquer um dos 15 membros do time (**15 opções**) enquanto o segundo pode ser qualquer um dos 14 restantes (**14 opções**). No entanto, é importante lembrar que uma mesma dupla pode ser escolhida de **duas** maneiras diferentes (**dupla AB = dupla BA**), assim, é preciso dividir o valor encontrado pela multiplicação de 14 e 15 (valor considerando a ordem), agrupando de dois em dois.

Portanto, podem ser formadas $\frac{15 \times 14}{2} = 105$ **duplas** distintas para o karaokê.

2) Pedro, Melissa, Antônia, Aline e Thesley são os novos membros do Time Venn. Foi decidido que, durante a reunião de final de ano do Time, três dos novos membros vão se apresentar pela parte da manhã, um de cada vez, e os outros dois vão se apresentar pela parte da tarde, também um de cada vez.



- a) De quantas maneiras distintas é possível escolher a ordem em que os novos membros vão se apresentar?
- b) De quantas maneiras distintas é possível escolher quais são os três membros que vão se apresentar pela parte da manhã e quais são os dois membros que vão se apresentar pela parte da tarde?

Resolução:

a) Como o próprio enunciado deixou claro, trata-se de escolher a ordem em que os membros se apresentam. Ou seja, trata-se de um problema de ordenação, a ordem importa. O primeiro candidato a apresentar-se pode ser qualquer um dos cinco (5 opções), o segundo pode ser qualquer um dos outros (4 opções), o mesmo para o terceiro (3 opções) e para o quarto (2 opções), e o último é aquele que restou sem apresentar-se (1 opção).

Assim, existem $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras de ordenar as apresentações.

b) Nesse segundo problema, basta escolher quais são os 3 membros que apresentarão de manhã e quais serão os 2 membros que apresentarão de tarde, sem atribuir ordem às apresentações, logo, a ordem não importa.

Inicialmente, é importante notar que, tendo-se escolhido os 3 membros que apresentarão pela manhã, os 2 que apresentarão pela tarde já estão automaticamente escolhidos (devem ser os 2 únicos a não apresentar pela manhã). Assim, esse problema trata-se de escolher 3 pessoas dentre um grupo inicial de 5 pessoas (os 3 que se apresentam pela manhã).

O primeiro escolhido pode ser qualquer um dos cinco (**5 opções**), o segundo pode ser qualquer um dos outros (**4 opções**), e o mesmo para o terceiro (**3 opções**). Chegando a $5 \times 4 \times 3 = 60$ grupos.

No entanto, é preciso lembrar que um mesmo grupo de 3 pessoas pode ser escolhido de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras, já que ordem não importa, sendo necessário agrupá-los.

Portanto, existem $\frac{60}{6} = 10$ maneiras de escolher os cinco que se apresentam pela manhã.

Note ainda que escolher os 3 que se apresentam pela manhã é equivalente a escolher os 2 que se apresentam pela tarde (já que os não escolhidos ficariam, necessariamente, encarregados de apresentar-se no outro turno). Assim, pode-se atacar o mesmo problema tentando escolher os 2 que se apresentam pela tarde, desconsiderando a ordem, e chegaríamos ao mesmo resultado.



3) Emmanuel vai passar um mês fazendo um intercâmbio na Itália. Como gosta muito de ler livros de Ciência, Emmanuel decide que vai levar alguns dos seus livros para ler durante a viagem.

a) Partindo de uma prateleira de 5 livros diferentes, quantas pilhas distintas de 3 livros Emmanuel pode formar?

b) Partindo da mesma prateleira de 5 livros, de quantas maneiras Emmanuel pode escolher os 3 livros que o acompanharão durante a viagem?

Resolução:

a) Em uma pilha de 3 livros, um dos livros está na base, um no meio e um no topo. A partir dos mesmos 3 livros, é possível formar pilhas diferentes, uma vez que a maneira como os livros são empilhados importa, ou seja, a ordem importa. O livro que estará na base da pilha pode ser qualquer um dos 5 disponíveis (5 opções), o do meio pode ser qualquer um dos outros 4 livros (4 opções) e o topo qualquer um dos restantes (3 opções).

Assim, pode-se formar $5 \times 4 \times 3 = 60$ pilhas distintas.

b) Do item (a), já sabemos que quando a ordem importa, podemos formar 60 pilhas de 3 livros a partir dos 5 livros iniciais da prateleira. Para cada grupo de 3 livros, pode-se formar $3 \times 2 \times 1 = 6$ pilhas diferentes. Ou seja, se existem 60 pilhas, e cada 6 pilhas correspondem a um conjunto de 3 livros diferente, existem então $\frac{60}{6} = 10$ formas de escolher 3 livros.

4) Os membros do Time Venn precisam formar uma comissão para produzir uma apostila de Matemática. Ficou decidido que o grupo será composto por 4 membros, sendo um membro para escrever os textos, um membro para cuidar das imagens e outros dois membros para escrever as questões. Sabendo que existem 10 membros disponíveis para compor a comissão de produção da apostila, quantas comissões diferentes é possível formar?



Resolução 1:

O primeiro membro escolhido será o que vai escrever os textos (**10 opções**).

O segundo membro escolhido vai cuidar das imagens (**9 opções**).

O terceiro membro escolhido vai ser o primeiro escritor de questões (**8 opções**).

O quarto membro escolhido vai ser o segundo escritor de questões (**7 opções**).

Essa etapa pode ser feita de $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ maneiras.

Note, porém, que o enunciado não estabelece nenhuma distinção entre os dois membros que ficarão responsáveis pela escrita das questões. A partir disso, pode-se concluir que se o membro A é o terceiro a ser escolhido e o membro B é o quarto a ser escolhido, ou então se o membro B é o terceiro a ser escolhido e o membro A é o quarto a ser escolhido, no final teremos formado a exata mesma comissão, já que o terceiro e o quarto escolhidos desempenham a mesma função no grupo.

Ou seja, para **2** das configurações obtidas pelo **Princípio Fundamental da Contagem**, chegamos a exata mesma comissão, sendo necessário agrupá-las.

Portanto, pode-se formar $\frac{5040}{2} = \mathbf{2520}$ comissões diferentes.

Resolução 2:

Vamos primeiro pensar de quantas maneiras pode-se escolher 4 membros, dentre os 10 disponíveis, para participar da comissão, sem atribuir cargos a eles, ou seja, sem a ordem importar.

O primeiro membro escolhido será o que vai escrever os textos (**10 opções**).

O segundo membro escolhido vai cuidar das imagens (**9 opções**).

O terceiro membro escolhido vai ser o primeiro escritor de questões (**8 opções**).

O quarto membro escolhido vai ser o segundo escritor de questões (**7 opções**).

Ou seja, a escolha **ordenada** pode ser feita de $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ maneiras.

No entanto, como a ordem não importa, é preciso lembrar que um mesmo conjunto de 4 membros pode formar $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ escolhas **ordenadas** diferentes. Ou seja, pode-se simplesmente escolher os 4 membros, sem atribuir ordem, de $\frac{5040}{24} = 210$ maneiras distintas.

Depois, é preciso pensar que, para resolver o problema, é necessário escolher os 4 membros E escolher 1 dos 4 para ser o responsável pela escrita dos textos E escolher 1 dos 4

para ser o responsável pelas imagens (os outros dois ficam, automaticamente, encarregados de escrever as questões).

Já sabemos que a escolha dos membros pode ser feita de 210 maneiras.

Um dos 4 membros escolhidos deve ficar responsável pela escrita dos textos (4 opções) e um dos outros 3 restantes deve ficar responsável pelas imagens (3 opções).

Logo, a comissão pode ser formada de $210 \times 4 \times 3 = \mathbf{2520}$ maneiras distintas.

5) Uma escola tem 5 alunos do 6º ano e 6 alunos do 7º ano. Deseja-se formar uma comissão de 3 alunos para representar a escola em um evento — mas a comissão pode ser composta ou inteiramente por alunos do 6º ano, ou inteiramente por alunos do 7º ano, ou por uma mistura de ambos (neste último caso, não há restrição de quantidade de cada série). Depois de formada a comissão de 3 alunos, um deles deve ser escolhido como porta-voz do grupo. De quantas formas a comissão e o porta-voz podem ser definidos?

Resolução:

Pela análise do enunciado, percebemos que existem os seguintes 4 tipos diferentes de escolha de alunos de acordo com o número de alunos do 6º e do 7º ano:

Tipo de escolha	Quantidade de alunos do 6º ano	Quantidade de alunos do 7º ano
1	3	0
2	2	1
3	1	2
4	0	3

Como a escolha OU será do tipo 1, OU será do tipo 2, OU será do tipo 3, OU será do tipo 4, precisamos calcular quantas escolhas de cada tipo existem e somá-las para chegar à quantidade total de escolhas existentes. Vamos fazer isso desconsiderando inicialmente quem será o porta-voz da comissão.

i) Tipo de escolha 1

Como existem 5 alunos no 6º ano, tem-se **(5 opções)** para o primeiro membro da comissão, **(4 opções)** para o segundo membro e **(3 opções)** para o terceiro. No entanto, a ordem na qual esses membros são escolhidos não importa, logo, é preciso lembrar que um mesmo conjunto de 3 pessoas pode formar $3 \times 2 \times 1 = 6$ escolhas ordenadas distintas.

Logo, a escolha **não ordenada** pode ser feita de $\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ maneiras distintas.

ii) Tipo de escolha 2

É preciso escolher 2 alunos do 6º ano **E** escolher 1 aluno do 7º ano.

O primeiro aluno do 6º ano pode ser qualquer um dentre os 5 disponíveis **(5 opções)**, e o segundo pode ser qualquer um dos outros 4 **(4 opções)**. No entanto, uma mesma dupla de alunos pode ser escolhida de $2 \times 1 = 2$ maneiras distintas na escolha ordenada. Logo, a dupla de alunos do 6º ano pode ser escolhida de $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ maneiras distintas.

O aluno do 7º ano pode ser qualquer um dos 6 disponíveis **(6 opções)**.

Portanto pode-se escolher os dois alunos do 6º ano e o aluno do 7º ano de $10 \times 6 = 60$ maneiras distintas.

iii) Tipo de escolha 3

É preciso escolher 1 aluno do 6º ano **E** escolher 2 alunos do 7º ano.

O aluno do 6º ano pode ser qualquer um dos 5 disponíveis **(5 opções)**.

O primeiro aluno do 7º ano pode ser qualquer um dentre os 6 disponíveis **(6 opções)**, e o segundo pode ser qualquer um dos outros 5 **(5 opções)**. No entanto, uma mesma dupla de alunos pode ser escolhida de $2 \times 1 = 2$ maneiras distintas na escolha ordenada. Logo, a dupla de alunos do 7º ano pode ser escolhida de $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ maneiras distintas.

Portanto pode-se escolher um aluno do 6º ano e os dois alunos do 7º ano de $5 \times 15 = 75$ maneiras distintas.

iv) Tipo de escolha 4

Como existem 6 alunos no 7º ano, tem-se **(6 opções)** para o primeiro membro da comissão, **(5 opções)** para o segundo membro e **(4 opções)** para o terceiro. No entanto, a ordem na qual esses membros são escolhidos não importa, logo, é preciso lembrar que um mesmo conjunto de 3 pessoas pode formar $3 \times 2 \times 1 = 6$ escolhas ordenadas distintas.

Logo, a escolha **não ordenada** pode ser feita de $\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ maneiras distintas.

Somando a quantidade de escolhas possíveis de cada tipo, conclui-se que os alunos da comissão podem ser escolhidos de $10 + 60 + 75 + 20 = 165$ maneiras distintas.

Após isso, basta escolher 1 dos 3 membros do grupo de alunos escolhidos para ser o porta-voz da comissão (**3 opções**). Assim, totalizam-se $165 \times 3 = 495$ **comissões diferentes**.

D.6 Fila x Roda: Análise Combinatória Circular

Você sabe explicar qual é a diferença, do ponto de vista da Análise Combinatória, entre os dois problemas abaixo:

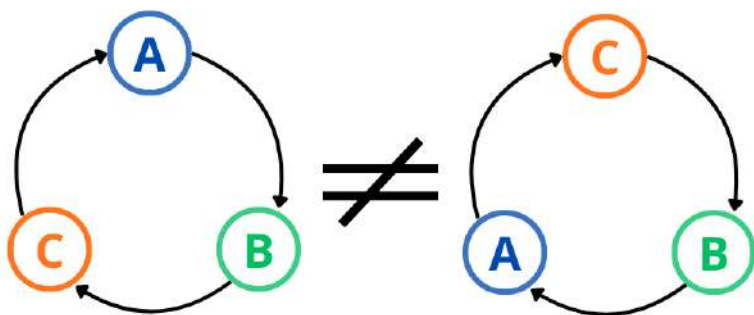
1) A partir de um grupo de 10 pessoas, de quantas maneiras diferentes é possível formar uma fila de 3 pessoas?

2) A partir de um grupo de 10 pessoas, de quantas maneiras diferentes é possível formar uma roda de ciranda de 3 pessoas?

É fácil identificar que o problema (1) se trata de um caso linear, onde a ordem em que as pessoas são colocadas importa, enquanto o problema (2) se trata de um caso circular.

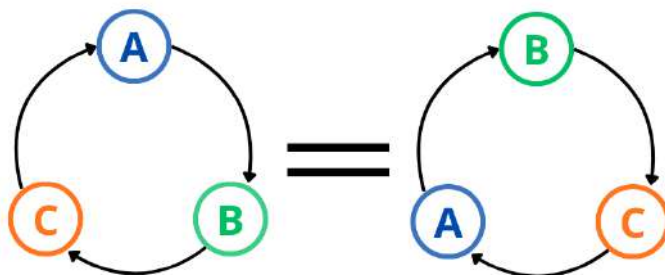
Mas surgem algumas perguntas a partir disso:

Será que a ordem importa no caso circular?



A resposta é sim! Observe que, nas rodas de ciranda acima, partindo da pessoa A e indo em sentido horário tem-se $A \rightarrow B \rightarrow C$ em uma ciranda e $A \rightarrow C \rightarrow B$ na outra ciranda. Logo, as duas rodas de ciranda **não podem** ser consideradas iguais porque a ordem em que as pessoas estão dispostas mudou. Portanto, **a ordem importa**.

Então qual é a diferença para o caso da fila?



Observe que, nas rodas de ciranda acima, partindo da pessoa A e indo em sentido horário tem-se $A \rightarrow B \rightarrow C$ em uma ciranda e $A \rightarrow B \rightarrow C$ na outra ciranda. Logo, as duas rodas de ciranda **podem** ser consideradas iguais porque a ordem em que as pessoas estão dispostas é a mesma, por mais que não pareça na roda. Pode-se considerar que a segunda roda é a primeira, só que “girada” 2 posições no sentido horário. Portanto, **a ordem importa**, mas **existem configurações diferentes para dispor uma mesma sequência de pessoas**.

Vamos então resolver o problema (2) da seguinte forma:

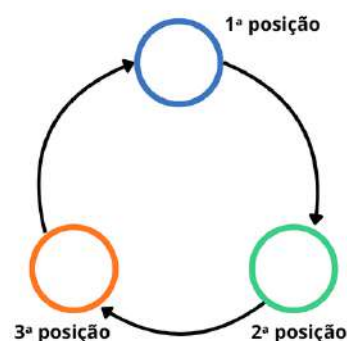
- i) Vamos ordenar as pessoas na roda de ciranda;
- ii) Vamos calcular quantas rodas de ciranda de aparência diferente podemos formar com essa mesma sequência de pessoas;
- iii) Vamos agrupar as rodas que são versões “giradas” de outra roda, para chegar ao resultado final.

i) Ordenar as pessoas na roda

A pessoa da primeira posição na ciranda pode ser qualquer uma dentre as três disponíveis. **(3 opções)**

A pessoa da segunda posição na ciranda pode ser qualquer uma dentre as duas outras disponíveis. **(2 opções)**

A pessoa da terceira posição na ciranda deve ser a que restou **(1 opção)**



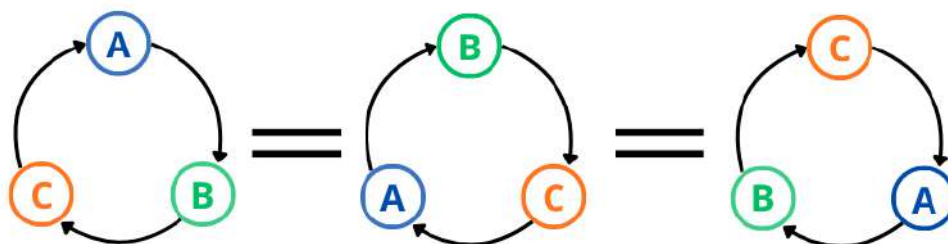
Ou seja, pode-se ordenar as pessoas na roda de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras distintas.

ii) Rodas giradas

Suponha que em (i) tenha-se escolhido a sequência $C \rightarrow A \rightarrow B$. De quantas formas distintas essas pessoas podem estar dispostas na roda de ciranda nessa mesma sequência? A resposta é 3.

Basta escolher qual das três pessoas ocupa a 1ª posição da roda e, automaticamente, todos os outros dois lugares estão escolhidos, já que a ordem é a mesma.

No caso desse exemplo, aqui vão as 3 configurações possíveis:



Note que todas as configurações apresentam a mesma sequência de pessoas, apenas dispostas em aparências distintas.

iii) Agrupar as rodas

No item (i) concluímos que existem 6 aparências de rodas distintas. Contudo, no item (ii) concluímos que 1 mesma roda de ciranda, ou seja, 1 mesma sequência de pessoas, pode gerar 3 aparências distintas.

Assim, se cada roda de ciranda gera 3 aparências, e no total temos 6 aparências de rodas, podemos concluir que existem $\frac{6}{3} = 2$ rodas de ciranda distintas para três pessoas.

Agora é sua vez! Treine a Análise Combinatória Circular pelos problemas a seguir:

1) Quantas rodas de ciranda diferentes podem ser formadas com 4 pessoas?

Resolução:

Seguindo o mesmo raciocínio usado para determinar a quantidade de rodas de ciranda possíveis com 3 pessoas, fazemos o seguinte:

i) Ordenar as pessoas na roda

A ordenação segue a lógica da ordenação linear, então pode ser feita de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras distintas.

ii) Rodas giradas

Para uma mesma sequência de pessoas, pode-se formar 4 aparências de roda distintas. Isso porque basta escolher a pessoa que ocupa a 1ª pessoa e as demais estarão, automaticamente, definidas.

iii) Agrupar as rodas

Se, pelo item (ii) cada roda pode se apresentar sob 4 aparências diferentes e, pelo item (i), existem 24 aparências de roda, então chegamos à conclusão de que existem $\frac{24}{4} = 6$ rodas diferentes com 4 pessoas.

2) André e seu irmão Tiago vão formar uma roda de ciranda com outros 4 amigos. Quantas rodas de ciranda podem ser formadas nas quais André e seu irmão estão, necessariamente, lado a lado?

Resolução:

Vamos considerar inicialmente, que André e Tiago estão presos juntos, já que eles devem aparecer em posições consecutivas. Com isso, pode-se contar essa ‘pessoa’ André + Tiago como se fosse uma única e incluir os outros 4 amigos, chegando ao problema de como colocar apenas 5 pessoas em roda.

Pelos problemas anteriores, podemos colocar 5 pessoas em roda de $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5} = 24$ maneiras diferentes.

No entanto, agora vamos ‘soltar’ André e Tiago, eles ainda devem estar lado a lado, porém, para uma mesma configuração, Tiago pode estar à esquerda ou à direita de André.

Portanto, para cada uma das 24 configurações com André e Tiago presos, chega-se a 2 configurações finais, uma com Tiago à esquerda de André e uma com Tiago à direita de André.

Logo, a roda pode se formar de $24 \times 2 = 48$ formas diferentes.

D.7 Probabilidade

Definição de Probabilidade

Até agora, você aprendeu a contar quantas formas diferentes um evento pode acontecer. A Probabilidade pergunta uma coisa ligeiramente diferente: entre todas as formas possíveis de algo acontecer, qual fração delas corresponde ao resultado que nos interessa?

A probabilidade (P) de um evento (E) acontecer é então definida como a razão entre a quantidade de casos em que E acontece (casos favoráveis) e a quantidade total de casos possíveis.

$$P(E) = \frac{\# \text{ casos favoráveis}}{\# \text{ casos possíveis}}$$

Tanto a quantidade de casos favoráveis quanto a quantidade de casos possíveis vão ser obtidas pelas ferramentas que você já construiu até aqui, em Análise Combinatória. Aqui seguem alguns exemplos de aplicação da definição de probabilidade:

Ex. 1: Dado uma urna com os números de 1 a 20, qual a probabilidade de se sortear um número múltiplo de 5?

Resolução: Entre os números de 1 a 20, os múltiplos de 5 são 5, 10, 15, e 20. Assim, existem 4 casos favoráveis dentre 20 casos possíveis (qualquer 1 dos 20 números da urna pode ser sorteado mas só 4 deles são múltiplos de 5). Logo, a probabilidade é

$$P(E) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Ex. 2: Em um sorteio no qual serão distribuídas 100 fichas e 1 delas será sorteada para determinar o vencedor do sorteio, Matheus compra 2 fichas. Qual é a probabilidade de que Matheus vença o sorteio?

Resolução: Dentre as 100 fichas do sorteio, somente 2 são favoráveis ao cenário de Matheus vencer o sorteio. Logo, a probabilidade é de $P(E) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$.

Ex. 3: Formando-se uma fila de maneira aleatória com 5 pessoas, dentre as quais está Ana, qual a probabilidade de que Ana seja a primeira pessoa da fila?

Resolução: Com 5 pessoas, e lembrando que em uma fila a ordem em que as pessoas são dispostas importa, é possível formar $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ filas distintas.

Fixando Ana na primeira posição, restam 4 pessoas para compor uma fila de 4 pessoas atrás de Ana, o que pode ser feito de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras.

Logo, existem 120 filas possíveis, e 24 delas são favoráveis, com Ana na primeira posição. Portanto, a probabilidade é $P(E) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.

Operadores lógicos na probabilidade

Agora precisamos lembrar do conteúdo visto nas seções D.2, quando estudamos que quando duas escolhas são independentes e ambas precisam ocorrer (E), multiplicamos o número de opções; quando só uma entre duas alternativas pode ocorrer (OU), somamos. A mesma lógica vale para probabilidade — só que agora, em vez de números de opções, multiplicamos ou somamos frações.

Ex. 1: Uma rede de meteorologia divulgou que a probabilidade de chover pela manhã em uma cidade é de $P(E_{\text{manhã}}) = \frac{1}{4}$ e que a probabilidade de chover durante a tarde é de $P(E_{\text{tarde}}) = \frac{2}{3}$. Sabendo que a rede também divulgou que os dois eventos são independentes, ou seja, chover ou não pela manhã não influencia na probabilidade de chover pela tarde, qual é a probabilidade de que chova pela manhã **E** chova pela tarde.

Resolução: Como já foi explicado, a probabilidade de que dois eventos independentes aconteçam é o produto da probabilidade de cada evento acontecer, separadamente. Assim, a probabilidade de chover pela manhã **E** chover pela tarde é de

$$P(E_{\text{manhã}} \text{ e } E_{\text{tarde}}) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

Ex. 2: Em uma corrida de Fórmula 1, especialistas divulgam que a probabilidade de um holandês vencer a corrida é de $P(E_{\text{holandês}}) = \frac{3}{20}$ enquanto a probabilidade de um brasileiro vencer a corrida é de $P(E_{\text{brasileiro}}) = \frac{1}{5}$. Qual a probabilidade de um holandês vencer a corrida **OU** um brasileiro vencer a corrida?

Resolução: Como os dois eventos são **mutuamente exclusivos** (isto é, ou um acontece ou o outro acontece), é possível simplesmente somar a probabilidade de cada evento acontecer para chegar à probabilidade de que um aconteça **OU** o outro aconteça. Assim, a probabilidade de um holandês vencer a corrida **OU** um brasileiro vencer a corrida é de

$$P(E_{\text{holandês}} \text{ ou } E_{\text{brasileiro}}) = \frac{3}{20} + \frac{1}{5} = \frac{3}{20} + \frac{4}{20} = \frac{7}{20}.$$

Princípio da Inclusão-Exclusão na probabilidade

No capítulo D.3, vimos que nem todo OU trata de casos mutuamente exclusivos, ou seja, nem todo OU trata de casos que ou um evento acontece, ou o outro evento acontece, sem haver possibilidade dos dois eventos acontecerem. Em alguns casos, pode ser que os dois

eventos aconteçam simultaneamente, sendo necessário subtrair a quantidade de eventos na interseção, para que eles não sejam contados duas vezes. (Aqui pode ser útil revisar o que foi aprendido no capítulo D.3)

É importante saber que o mesmo acontece na probabilidade. Quando você quer saber a probabilidade do evento A acontecer OU do evento B acontecer e os eventos A e B não são mutuamente exclusivos, é necessário:

- Somar a probabilidade de A acontecer $\Rightarrow + P(A)$
- Somar a probabilidade de B acontecer $\Rightarrow + P(B)$
- Subtrair a probabilidade A acontecer E B também acontecer $\Rightarrow - P(A \text{ e } B)$

Ex. 1: Arthur é um grande corredor de maratonas. Todo final de semana ele faz uma corrida diferente em alguma cidade do estado de Minas Gerais. Determinado dia, especialistas calculam que a probabilidade de Arthur vencer sua próxima corrida é de $P(A) = \frac{2}{5}$, enquanto a probabilidade dele vencer a corrida após essa é de $P(B) = \frac{5}{6}$.

Sabendo disso, responda:

a) Qual a probabilidade de Arthur vencer as duas próximas corridas?

b) Qual a probabilidade de Arthur vencer a próxima OU a outra corrida?

Resolução:

Vamos chamar a próxima corrida de corrida A e a seguinte de corrida B.

a) Para Arthur vencer as duas próximas corridas, ele precisa vencer a corrida A, E vencer a corrida B.

Assim, a probabilidade é de $P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b) Nesse caso, é preciso:

- Somar a probabilidade de Arthur vencer a corrida A;
- Somar a probabilidade de Arthur vencer a corrida B; e
- Subtrair a probabilidade de Arthur vencer a corrida A, E vencer a corrida B.

As duas primeiras já foram dadas, ($P(A) = \frac{2}{5}$ e $P(B) = \frac{5}{6}$). A terceira foi calculada no item (a), chegando a $P(A \text{ e } B) = \frac{1}{3}$.

Portanto, a probabilidade dele vencer **pelo menos uma** das duas corridas (o que inclui a possibilidade dele vencer as duas) é de $P(A \text{ ou } B) = \frac{2}{5} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$.

Passando o denominador para o MMC(5, 6, 3) = 30, teremos

$$P(A \text{ ou } B) = \frac{12 + 25 - 10}{30} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}.$$

Ex. 2: Um mural foi pintado com as cores azul e amarelo. Todas as regiões do mural são pintadas com pelo menos uma das duas cores, e as regiões onde as duas cores são usadas acabam adquirindo coloração verde. Sabe-se que, ao final da pintura, o verde ocupa $\frac{1}{6}$ da área do mural, e que, durante a pintura, usa-se o azul em $\frac{2}{3}$ do mural. Um laser vai atingir um ponto totalmente aleatório do mural.

a) Qual é a probabilidade de que o ponto atingido tenha a cor azul?

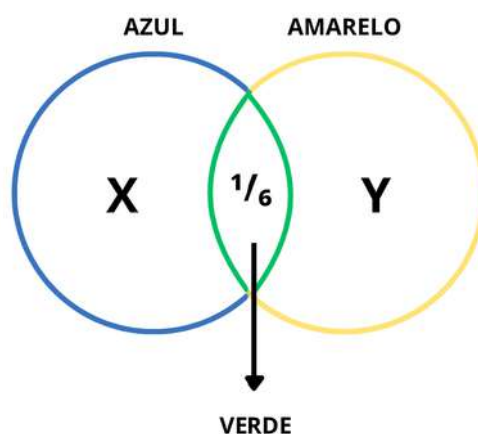
b) Qual é a probabilidade de que o ponto atingido tenha a cor amarela?

Resolução:

A probabilidade do laser aleatório atingir um ponto de uma coloração específica vai ser igual a fração da área do mural ocupada por aquela cor.

Assim, vamos montar o **Diagrama de Venn**, lembrando que

- A área total do mural corresponde a 1;
- A área da **interseção** corresponde à fração pintada de azul e de amarelo, que acaba adquirindo coloração verde;
- Vamos chamar de X a área que foi pintada **somente** de azul; e
- Vamos chamar de Y a área que foi pintada somente de amarelo.



Como o problema diz que $\frac{2}{3}$ do mural é inicialmente pintado de azul, e tanto a parte que adquire coloração azul quanto a parte que adquire coloração verde são inicialmente pintados de azul, então:

$$X + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow X = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \Rightarrow X = \frac{4 - 1}{6} = \frac{3}{6} \Rightarrow X = \frac{1}{2}$$

Como todo o mural recebe pelo menos uma cor, então:

$$X + \frac{1}{6} + Y = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + Y = 1 \Rightarrow \frac{4}{6} + Y = 1 \Rightarrow Y = 1 - \frac{4}{6} \Rightarrow Y = \frac{1}{3}$$

a) A probabilidade atingir um ponto azul é de $X = \frac{1}{2}$ já que essa é a fração da área do mural ocupada pela cor azul.

b) A probabilidade atingir um ponto amarelo é de $Y = \frac{1}{3}$ já que essa é a fração da área do mural ocupada pela cor amarela.

Agora é sua vez, pratique probabilidade por meio dos seguintes exercícios resolvidos:



1) Gustavo brinca de Cara ou Coroa, jogando a moeda repetidas vezes.

a) Qual é a probabilidade de um lançamento resultar em Cara?

b) Se Gustavo faz 3 lançamentos, qual é a probabilidade de que os 3 lançamentos seguidos resultem em Cara?

c) Se Gustavo faz 3 lançamentos, qual é a probabilidade de que os 3 lançamentos resultem em Coroa, ou que os 2 primeiros lançamentos resultem em Cara?

Resolução:

a) Para o primeiro e único lançamento, existem dois resultados possíveis, que têm a mesma probabilidade de acontecer (ou sai cara, ou sai coroa), e só um deles é favorável à pergunta do problema (sair cara), assim, a probabilidade de sair cara é de $P(K) = \frac{1}{2}$.

b) Para que saia cara nos 3 lançamentos, é preciso sair cara no primeiro lançamento E sair cara no segundo lançamento E sair cara no terceiro lançamento. Ou seja,

$$P(3 \text{ caras}) = P(\text{cara } L_1) \times P(\text{cara } L_2) \times P(\text{cara } L_3)$$

Já vimos no item (a) que a probabilidade de sair cara em um lançamento qualquer é de $\frac{1}{2}$, ou seja,

$$P(\text{cara } L_1) = P(\text{cara } L_2) = P(\text{cara } L_3) = \frac{1}{2}$$

Portanto, a probabilidade de que os 3 lançamentos resultem em 3 caras é de:

$$P(3 \text{ caras}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

c) Deseja-se saber a probabilidade de sair 3 coroas seguidas OU de sair cara nos 2 primeiros lançamentos. Devemos lembrar que nem todo caso de OU resulta na soma direta das probabilidades, devido ao Princípio da Inclusão-Exclusão. No entanto, nesse caso, pode-se afirmar que os eventos são mutuamente exclusivos, ou seja, nunca os dois eventos acontecem ao mesmo tempo. Isso porque é impossível tirar 3 coroas mas também tirar 2 caras se só se fazem 3 lançamentos.

Assim, para resolver o problema, deve-se

- i) Somar a probabilidade de obter 3 coroas; e
- ii) Somar a probabilidade de obter 2 caras nos 2 primeiros lançamentos.

i) Probabilidade de obter 3 coroas

No item (b), vimos que a probabilidade de se obterem 3 caras é de $\frac{1}{8}$. Assim, a probabilidade de se obter 3 coroas em 3 lançamentos também é, necessariamente, $\frac{1}{8}$, já que as duas situações ocorrem nas mesmas condições.

ii) Probabilidade de obter 2 caras nos 2 primeiros lançamentos

A probabilidade de se obter cara no primeiro lançamento é de $\frac{1}{2}$, a probabilidade de se obter cara no segundo lançamento é de $\frac{1}{2}$ e no terceiro lançamento não importa o resultado ($P(L_3) = 1$).

Assim, a probabilidade de se obter 2 caras nos 2 primeiros lançamentos é de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Portanto, conclui-se que a probabilidade de se obter 3 coroas **OU** de se obter 2 caras nos dois primeiros lançamentos é de $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1+2}{8} = \frac{3}{8}$.

2) Uma roleta circular de um parque de diversões é dividida em 4 setores coloridos, cada um correspondendo a um ângulo diferente do círculo: Vermelho (90°), Azul (60°), Verde (150°) e Amarelo (60°). Uma criança gira a roleta e ela para em um ponto aleatório da circunferência. Qual a probabilidade de a roleta parar no setor Verde?



Resolução:

A roleta pode ser interpretada como um círculo que tem, como todo círculo, ângulo central de 360° . Como o enunciado diz, se ligarmos cada extremidade da seção verde ao centro da roleta circular, formaríamos um ângulo de 150° . Ou seja, se dividirmos o círculo em 360 partes iguais a partir do centro, 150 delas estariam contidas na área verde.

Portanto, a probabilidade da roleta parar na área verde é de $\frac{150}{360} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.



3) Sara tem um dado de 6 faces e vai fazer 4 lançamentos sequenciais.

a) Qual é a probabilidade de que os lançamentos resultem nos números de 1 a 4, em ordem crescente?

b) Qual é a probabilidade de que os lançamentos resultem nos números de 1 a 4, em ordem crescente OU em ordem decrescente?

c) Qual é a probabilidade de que os lançamentos resultem nos números de 1 a 4, em qualquer ordem?

Resolução:

a) Nesse problema, os resultados esperados de cada lançamento já são completamente definidos:

- O primeiro lançamento deve resultar em 1;
- O segundo lançamento deve resultar em 2;
- O terceiro lançamento deve resultar em 3; e
- O quarto lançamento deve resultar em 4;

A probabilidade de se obter um número específico dentre os seis números do dado em um lançamento qualquer é de $\frac{1}{6}$, e é exatamente isso que se quer em cada lançamento, um número **específico** dentre os seis possíveis.

Assim, a probabilidade de se obter os números de 1 a 4, em ordem crescente nos lançamentos é de $P(1 \text{ a } 4, \text{ crescente}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$.

b) Obter os números de 1 a 4 em ordem decrescente ($4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$) nos 4 lançamentos é um problema igual a obter os números de 1 a 4 em ordem crescente ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$). Em ambos os casos se deseja um número específico dentre os 6 possíveis por 4 lançamentos consecutivos. Assim, pode-se dizer que as probabilidades são iguais:

$$P(1 \text{ a } 4, \text{ decrescente}) = P(1 \text{ a } 4, \text{ crescente}) = \frac{1}{1296}.$$

Como se deseja os números em ordem crescente OU em ordem decrescente, faz-se a soma, sem se preocupar com o Princípio da Inclusão-Exclusão porque os casos são mutuamente exclusivos.

$$\text{Logo, } P = \frac{1}{1296} + \frac{1}{1296} = \frac{2}{1296} = \frac{1}{648}.$$

c) Sabemos que todos os casos que envolvem obter os números de 1 a 4 nos lançamentos têm uma probabilidade de $\frac{1}{1296}$ cada, pela lógica já apresentada de que são problemas iguais. Ou seja:

$$P(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4) = \frac{1}{1296}$$

$$P(1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3) = \frac{1}{1296}$$

$$P(1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4) = \frac{1}{1296}$$

$$P(1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2) = \frac{1}{1296}$$

...

$$P(4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1) = \frac{1}{1296}$$

Sabemos também que existem formas diferentes de embaralhar os números 1, 2, 3, e 4 nas 4 posições disponíveis para obtê-los. Para embaralhar esses números, escolhe-se 1 dentre os 4 para ser o primeiro lançamento (4 opções), 1 dentre os 3 restantes para ser o segundo lançamento (3 opções), 1 dentre os 2 restantes para ser o terceiro lançamento (2 opções) e o que restou deve ser o quarto lançamento (1 opção).

Ou seja, pode-se embaralhar os números de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras.

E cada um desses embaralhamentos tem uma probabilidade de $\frac{1}{1296}$ de acontecer nos lançamentos.

Assim, a probabilidade de **OU** acontecer o embaralhamento 1, **OU** acontecer o embaralhamento 2, ... **OU** acontecer o embaralhamento 24 é de

$$P = \frac{1}{1296} + \frac{1}{1296} + \frac{1}{1296} + \frac{1}{1296} + \dots + \frac{1}{1296} \text{ (24 vezes)}$$

$$P = \frac{1}{1296} \times 24 = \frac{24}{1296} = \frac{1}{54}.$$

4) No jogo de tabuleiro Reino Encantado, o dado de 6 faces não é numerado da forma tradicional: 3 faces trazem o brasão do Reino Vermelho, 2 faces trazem o brasão do Reino Azul, e apenas 1 face traz o brasão do Reino Verde. Ao lançar o dado, Pedro afirma: "Existem 3 reinos possíveis, então a chance de cair Reino Verde é de $\frac{1}{3}$." Calcule a probabilidade real de sair cada reino e explique por que o raciocínio de Pedro está equivocado.

Resolução:

Embora de fato existam 3 reinos, não se pode dizer que a probabilidade de sair cada um deles é de $\frac{1}{3}$ porque os eventos não são **equiprováveis** (não tem a mesma probabilidade cada). Isso porque o que determina qual reino vai sair no resultado é a quantidade de faces com o brasão deste reino, não a quantidade total de reinos.

Assim, temos

- **Probabilidade de sair o reino vermelho:** $P(\text{vermelho}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- **Probabilidade de sair o reino azul:** $P(\text{vermelho}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- **Probabilidade de sair o reino verde:** $P(\text{vermelho}) = \frac{1}{6}$.

5) Uma professora vai testar 3 alunos, um de cada vez, com perguntas diferentes. Cada aluno tem probabilidade $\frac{3}{4}$ de acertar sua pergunta, de forma independente dos demais. Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos 3 alunos erre sua pergunta?

Resolução:

Analisando as possíveis configurações finais de alunos que erram ou acertam a pergunta da professora, chegamos a seguinte configuração:

Configuração	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3
1	✓	✓	✓
2	✓	✓	✗
3	✓	✗	✓
4	✗	✓	✓
5	✓	✗	✗
6	✗	✓	✗

7	×	×	✓
8	×	×	×

Perceba que, em todas as configurações, exceto a primeira, pelo menos um aluno erra a pergunta da professora. Pensando nisso, se queremos a probabilidade de que pelo menos um aluno erre a pergunta, poderíamos pensar nesse problema pela ideia de que OU acontece a configuração 2, OU acontece a configuração 3, OU acontece a configuração 4, ..., OU acontece a configuração 8.

E isso resultaria em:

$$P(E) = P(C2) + P(C3) + P(C4) + \dots + P(C8)$$

No entanto, como a probabilidade de todas as configurações de 1 a 8 deve somar um, podemos pensar que a probabilidade de pelo menos um aluno errar a questão deve ser de

$$P(\text{pelo menos um erra}) = 1 - P(\text{configuração 1})$$

Sabe-se que a probabilidade da configuração 1 é a probabilidade de todos os alunos acertarem. A probabilidade de cada um dos três alunos acertarem é de $\frac{3}{4}$, então, a dos três acertarem em sequência é de $P(\text{configuração 1}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$.

Portanto, a probabilidade de que **pelo menos um** aluno erre é de

$$P(\text{pelo menos um erra}) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}.$$

Nota: observe como o problema ficou mais fácil só por focarmos em identificar a probabilidade do evento não acontecer, ao invés de querer saber a probabilidade do evento acontecer diretamente.

D.8 Princípio da Casa dos Pombos

Por mais engraçado que esse nome possa parecer para um conceito matemático, o Princípio da Casa dos Pombos realmente existe, sendo também conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Esse princípio afirma que, se você precisa colocar N pombos em M casas, tal que $N > M$, então, obrigatoriamente, pelo menos uma casa vai ficar com dois ou mais pombos.

Para provar esse princípio, vamos tomar o caso $N = M + 1$, ou seja, temos $M + 1$ pombos para colocar em M casas. Vamos supor que os primeiros M dos $M + 1$ pombos são colocados em casas diferentes. Ao final desse processo, todas as M casas disponíveis já abrigam exatamente 1 pombo e ainda falta exatamente 1 pombo para ser abrigado, como somente M dos $M + 1$ iniciais foram alocados.

Assim, o pombo de número $M + 1$ obrigatoriamente vai ser alocado em uma casa que já continha um pombo, formando uma casa que tem dois pombos. Dessa forma, verifica-se a validade do Princípio, uma vez que pelo menos uma casa (no caso, exatamente uma), conteve dois ou mais pombos (no caso, exatamente dois pombos).

Qualquer estratégia que não fosse colocar os M primeiros pombos em casas diferentes resultaria em uma casa com dois ou mais pombos ainda mais cedo no processo, também caindo sob o princípio.

Outros exemplos do Princípio das Casas dos Pombos

Ex. 1: Em um grupo de 13 pessoas, obrigatoriamente existirão pelo menos 2 que fazem aniversário no mesmo mês do ano.

Explicação: Como existem apenas 12 meses no ano, é impossível que todas as 13 pessoas do grupo façam aniversário em meses diferentes entre si. Ou seja, pelo menos 2 delas fazem aniversário no mesmo mês.

Ex. 2: Em um grupo de 27 pessoas, pelo menos 2 delas terão seus nomes começando com a mesma letra do alfabeto.

Explicação: Como existem apenas 26 letras no alfabeto, é impossível que todas as 27 pessoas do grupo tenham seus nomes começando com letras diferentes do alfabeto. Ou seja, pelo menos 2 tem seus nomes começando com a mesma letra.

Ex. 3: Em uma escola com 400 alunos, pelo menos 2 deles fazem aniversário no mesmo dia do ano.

Explicação: Como existem apenas 366 dias possíveis no ano (contando anos bissextos), é impossível que todos os 400 alunos da escola façam aniversário em dias diferentes. Ou seja, existem pelo menos 2 que fazem aniversário no mesmo dia.

Ex. 4: Sabendo que todos os seres humanos têm entre 1 e 150.000 fios de cabelo, em uma cidade com em uma cidade com 600.001 habitantes, existem pelo menos 7 pessoas com o mesmo número de fios de cabelo.

Explicação: Os 600.001 habitantes devem ser alocados em 150.000 categorias diferentes de quantidade de fios de cabelo. Note que, pela analogia do Princípio de Dirichlet, os habitantes seriam os pombos, e a quantidade de fios de cabelo são as casas que devem comportar os habitantes. Seguindo a estratégia ótima para minimizar o número de pombos em

cada casa, os primeiros 150.000 habitantes são colocados, cada um, em uma das 150.000 categorias. Depois repete-se esse processo para o segundo, terceiro e quarto grupo de 150.000 habitantes. Assim, na hora de alocar o último habitante (habitante número 600.001) em uma categoria de quantidade de fios de cabelo, todas as categorias já comportam exatamente 4 outros habitantes. Portanto, a categoria que abrigar o último habitante terá, necessariamente, 5 habitantes com a mesma quantidade de fios de cabelo.

Note que a estratégia ótima, nada mais é do que pensar no pior caso possível para o que se deseja no problema. No exemplo 1, por exemplo, pode até acontecer que todas as 13 pessoas analisadas façam aniversário no mesmo mês, mas para demonstrar que em qualquer grupo de 13 pessoas, 2 sempre fazem aniversário no mesmo mês, é preciso pensar na estratégia que mais tenta contrariar essa afirmação, ou seja, aquela que busca colocar todas as pessoas em meses diferentes, mas, mesmo assim, não consegue.

Agora é sua vez, aplique o **Princípio das Casas dos Pombos** nos seguintes exercícios resolvidos:

1) Tiago precisa escolher suas meias a partir de uma gaveta de meias soltas (sem formar pares) que guarda meias de 5 cores diferentes. Está escuro e Tiago não consegue identificar a cor das meias antes de retirar todas as meias necessárias.

a) Quantas meias Tiago precisa retirar, no mínimo, para garantir que ele conseguirá formar um par de meias da mesma cor?

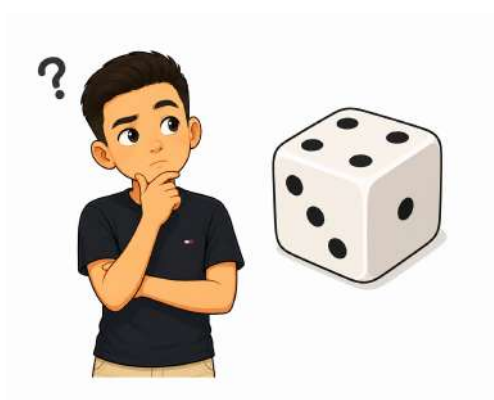


b) E para garantir que ele conseguirá formar um trio de meias da mesma cor?

Resolução:

a) Na analogia com o Princípio de Dirichlet, as meias seriam os pombos, que precisam ser alocadas em diferentes categorias de cor, em outras palavras, as casas. Como existem 5 casas (categorias de cor), é preciso de pelo menos 6 pombos (meias retiradas), para garantir que pelo menos dois pombos ficam abrigados na mesma casa (pelo menos duas meias têm a mesma cor). Assim, a resposta é 6 meias.

b) Seguindo a estratégia ótima para minimizar o número de meias da mesma cor, tem-se que as 5 primeiras meias retiradas vão ser todas de cores diferentes. Ou seja, cada casa (categoria de cor) fica ocupada com exatamente um pombo (meia). As próximas 5 meias retiradas também vão ser todas diferentes entre si, fazendo com que existam 2 meias de cada cor ao final desse processo. Nessa configuração, tem-se que a próxima meia retirada será, necessariamente, a terceira de uma mesma cor. Logo, retirando-se 11 meias haverá sempre um trio da mesma cor.



2) Gustavo lança repetidamente um dado comum de 6 faces. Qual é o número mínimo de lançamentos necessários para garantir que algum resultado (algum número de 1 a 6) apareça pelo menos 3 vezes?

Resolução:

Seguindo a estratégia ótima, os 6 primeiros resultados são todos diferentes entre si. Os próximos 6 resultados são, também, todos diferentes entre si. Nessa configuração, foram feitos $6 + 6 = 12$ lançamentos, e cada resultado foi obtido exatamente 2 vezes. Logo, **13º lançamento** será, obrigatoriamente, de um resultado que apareceu 3 vezes.



3) Natália joga um jogo no qual ela tira cartas de um baralho convencional. O baralho convencional é composto por 52 cartas de 4 naipes diferentes (espadas, copas, ouros e paus), com 13 cartas de cada naipe. Em um mesmo naipe, cada uma das 13 cartas têm valores diferentes (Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valete, Dama, e Rei).

a) Quantas cartas Natália deve retirar, no mínimo, para garantir que ela terá tirado ao menos 2 cartas do mesmo naipe.

b) E para garantir que existam pelo menos 3 cartas com o mesmo valor (ignorando o naipe)?

Resolução:

a) O problema quer saber quantas cartas, no mínimo, devem ser retiradas para garantir que pelo menos 2 delas sejam do mesmo naipe. Pela estratégia ótima, as 4 primeiras cartas serão de naipes diferentes. Assim, necessariamente, a quinta carta a ser retirada será de um naipe retirado, fazendo com que existam duas cartas de naipes iguais entre as retiradas por Natália. Logo, Natália deve retirar 5 cartas.

b) Existem 13 valores diferentes de carta. Pela estratégia ótima, as 13 primeiras cartas retiradas são todas de valores diferentes. As 13 próximas cartas retiradas também são todas de valores diferentes entre si. Assim, chega-se a um estado em que foi retirado um total de 26 cartas, e existem 2 cartas de cada valor possível. Logo, a 27ª carta retirada, necessariamente, fará com que existam pelo menos 3 cartas de mesmo valor.

4) Em uma festa de 12 convidados, cada convidado cumprimenta alguns dos outros convidados. Sabendo que nenhum convidado cumprimenta a si mesmo, e que dois convidados não se cumprimentam mais de uma vez, prove que existem pelo menos 2 convidados na festa que fazem o exato mesmo número de cumprimentos.

Resolução:

Se cada um dos 12 convidados da festa cumprimenta alguns dos outros convidados e não cumprimenta a si mesmo, quer dizer que um convidado qualquer pode cumprimentar entre 0 e 11 convidados. O convidado que não cumprimenta ninguém cumprimenta 0 convidados, e o convidado que cumprimenta todos os outros convidados cumprimenta 11 convidados. Além disso, todos os valores entre 0 e 11 são também possíveis, já que um convidado pode cumprimentar alguns convidados e não cumprimentar outros.

Até esse ponto, não parece que dois convidados farão, obrigatoriamente, a mesma quantidade de cumprimentos, tendo em vista que, existem 12 valores possíveis para a quantidade de cumprimentos (entre 0 e 11) e existem 12 convidados na festa.

Porém, é importante lembrar que não pode, ao mesmo tempo, existir uma pessoa que cumprimentou 0 convidados e uma outra pessoa que cumprimentou 11 convidados. Isso porque a pessoa que cumprimentou 11 convidados, necessariamente, cumprimentou todas as outras pessoas no salão. Não podendo, portanto, existir alguém que não cumprimentou ninguém.

Logo, em um salão de 12 convidados, só existem 11 valores possíveis para a quantidade de cumprimentos dos convidados (ou de 0 a 10 cumprimentos, ou de 1 a 11 cumprimentos). Assim, necessariamente, dois convidados terão feito a mesma quantidade de cumprimentos.

5) Numa urna há os inteiros de 1 a 30. Você retira números, um a um, sem reposição.

a) Qual o número mínimo de números que devem ser retirados para garantir que dois deles somem 31?



b) Qual o número mínimo de números que devem ser retirados para garantir que a diferença entre dois deles seja um múltiplo de 5?

Resolução:

a) Existem exatamente 15 pares de números entre 1 e 31 que resultam em 31 quando somados. São eles (1; 30), (2; 29), (3; 28), (4; 27), (5; 26), (6; 25), (7; 24), (8; 23), (9; 22), (10; 21), (11; 20), (12; 19), (13; 18), (14; 17) e (15; 16).

Assim, pela estratégia ótima, o pior caso possível para conseguir dois números que somam 31 é que as 15 primeiras escolhas sejam números que são todos de pares diferentes entre si.

Nessa configuração, a **16ª escolha** será, necessariamente, um número cujo par já foi escolhido, podendo fazer uma soma que resulta em 31.

Logo, deve-se retirar **16 números**.

b) Na urna, existem as seguintes categorias de números quanto à sua divisibilidade por 5:

- Números divisíveis por 5, são eles 5, 10, 15, 20, 25, e 30. Esses números podem ser escritos como **$5n$** tal que 'n' é um inteiro. No caso de 25, por exemplo, **$n = 5$** .
- Números que deixam resto 1 na divisão por 5, são eles, 1, 6, 11, 16, 21, e 26. Esses números podem ser escritos como **$(5m + 1)$** tal que 'm' é um inteiro. No caso de 16, por exemplo, **$m = 3$** .
- Números que deixam resto 2 na divisão por 5, são eles, 2, 7, 12, 17, 22, e 27. Esses números podem ser escritos como **$(5p + 2)$** tal que 'p' é um inteiro. No caso de 12, por exemplo, **$p = 2$** .
- Números que deixam resto 3 na divisão por 5, são eles, 3, 8, 13, 18, 23, e 28. Esses números podem ser escritos como **$(5q + 3)$** tal que 'q' é um inteiro. No caso de 23, por exemplo, **$q = 4$** .
- Números que deixam resto 4 na divisão por 5, são eles, 4, 9, 14, 19, 24, e 29. Esses números podem ser escritos como **$(5r + 4)$** tal que 'r' é um inteiro. No caso do 4, por exemplo, **$r = 0$** .

Para que a diferença de dois números quaisquer resulte em um múltiplo de 5, é preciso que eles estejam na mesma categoria de números. Faça o teste com números de uma mesma categoria e você verificará que a diferença será sempre um múltiplo de 5, faça o teste com números de categorias diferentes e você verificará que a diferença nunca será um múltiplo de 5.

Isso acontece porque, ao subtrair dois números de uma mesma categoria de divisibilidade, os restos daqueles números também se subtraem. Ou seja, o número gerado não deixará resto na divisão, será múltiplo.

Assim, seguindo a estratégia ótima, nas 5 primeiras escolhas serão escolhidos números de categorias diferentes. Logo, o sexto número a ser retirado da urna será, necessariamente, de uma categoria que já teve um número retirado, podendo formar uma subtração que resulta em múltiplo de 5.

Portanto, devem ser retirados 6 números.