

COMO SE PROVAR?

Gabriela Taniguchi

“Uma prova não é nada mais do que um argumento à prova d’água”
- Mira Bernstein

POR QUE PROVAR?

Uma prova permite a você convencer outras pessoas de que sua solução é correta, mas ainda mais importante do que isso, ela dá a você um entendimento mais profundo do problema, o qual pode ajudá-lo a resolver outros problemas mais difíceis futuramente.

Nas palavras do matemático Yuri Manin: “Uma boa prova é aquela que nos torna mais sábios”.

O QUE É UMA BOA PROVA?

Como você pode dizer que um argumento é bom o suficiente para ser uma prova?

A melhor maneira de provar algo é tentar se refutar a ponto de não encontrar nenhuma ponta solta ou brecha que invalide a sua resolução.

Imagine que você esteja explicando seu raciocínio para alguém que não saiba como resolver o problema em questão e busque oferecer os melhores recursos para que essa pessoa entenda o porquê de tudo o que foi feito levar à conclusão final.

Observe seguinte problema:

Problema 1. Suponha que você tenha uma caixa branca com 60 bolas brancas e uma caixa preta com 60 bolas pretas. Você então pega 20 bolas da caixa branca, coloca na caixa preta e mistura. Agora você pega 20 bolas (provavelmente algumas brancas e algumas pretas) da caixa preta e coloca na caixa branca. No final, qual é maior: o número de bolas pretas na caixa branca ou o número de bolas brancas na caixa preta?

Exemplos de provas inválidas ou incompletas:

- 1- Os dois números são iguais porque qualquer que seja o número de bolas pretas que movemos para a caixa branca, este será o número de bolas brancas que permanecerão na caixa preta.
- 2- Quando movemos as 20 bolas brancas para a caixa preta, a fração de bolas brancas na caixa preta é $\frac{1}{4}$ (20/80). Portanto, das 20 bolas que movermos da caixa preta para a caixa branca, um quarto (isto é, 5 bolas) serão brancas e três quartos (isto é, 15 bolas) serão pretas. Portanto, no final, a caixa branca terá 15 bolas pretas e a caixa preta terá 15 bolas brancas (pois colocamos 20 e movemos 5 de volta).
- 3- Se a caixa branca termina com menos do que 20 bolas pretas, então algumas das bolas que movemos para ela devem ser brancas. Logo, a caixa preta terá menos do que 20 bolas brancas no final, pois algumas delas retornam para a caixa branca. Estes números devem ser iguais, pois movemos 20 bolas a cada vez, daí o número de bolas de cores erradas em cada caixa são os mesmos.
- 4- Os dois números são iguais porque, qualquer que seja o número de bolas pretas que passamos para a caixa branca, esse será o mesmo número de bolas pretas que ficarão na caixa preta. Por exemplo, digamos que o conjunto de bolas que movemos para a caixa branca tivesse 13 bolas pretas e 7 bolas brancas. Então, a caixa preta teria 13 bolas brancas ao final (pois havia 20 antes e então movemos 7 de volta). Deste modo, os números serão sempre os mesmos.

Agora que vimos o que não prova algo, estudaremos métodos de se realizar uma prova.

PROVA DIRETA

É uma forma de mostrar que certa afirmação é falsa ou verdadeira através de uma combinação de axiomas (verdades imutáveis), lemas e teoremas já estabelecidos.

Ex 1. Se a soma de dois números inteiros é par, então a sua diferença também é par.

Ex 2. Prove que dados dois números a e b não negativos, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$. então

Ex 3. Prove que todo quadrado de um número inteiro deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4.

Ex 4. Mostre que o produto de quatro inteiros consecutivos sempre é um múltiplo de 24.

PROVA POR CONTRAEXEMPLO

Como o nome diz, basta acharmos algo que refute o enunciado. É utilizado para provar que algo é falso

Ex 1. Prove que para $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a^2 = b^2)$, não se pode concluir que $a = b$.

Ex 2. Todos os números primos são ímpares

Ex 3. Se $a \cdot b$ é par, então a e b são pares.

Ex 4. Se p e q são primos, então $p + q$ é composto

Ex 5. Se um número de dois ou mais dígitos é palíndromo, então esse número é necessariamente múltiplo de 11?

PROVA PELA CONTRAPOSITIVA

Em lógica, a contrapositiva de uma instrução condicional é formada negando ambos os termos e invertendo a direção da inferência. Explicitamente, a contrapositiva da instrução "se A , então B " é "se não B , então não A ". A instrução e a sua contrapositiva são logicamente equivalentes: se a afirmação é verdadeira, então a sua contrapositiva é verdadeira e vice-versa

Ex 1. Suponha que x seja um número inteiro tal que $5x + 11$ é ímpar. Mostre que x é par.

Ex 2. Suponha que x seja um número inteiro tal que $x^2 - 8x + 3$ é ímpar. Mostre que x é par.

PROVA POR ABSURDO

Este tipo de prova é feito assumindo-se como verdade o contrário do que queremos provar e então chegando-se a uma contradição.

Para ver se uma prova por absurdo pode funcionar para certo problema em particular, pergunte a si mesmo: "Se eu assumir que a afirmação é falsa, isto me dará algo concreto para me basear, um bom lugar para começar meu argumento?"

- i) Suponha que a afirmação que você deseja fosse falsa.
- ii) Por uma sucessão de argumentos lógicos, mostre que esta suposição levaria a um resultado impossível (uma absurdo).
- iii) Conclua que sua suposição está errada, logo a afirmação que você deseja provar tem que ser correta.

Ex 1. Prove que existem infinitos números primos.

Ex 2. Prove que $\sqrt{2}$ é um número irracional

Ex 3. Se n é um número inteiro e seu quadrado é ímpar, então n também é ímpar.

PROVA POR INDUÇÃO

Indução matemática é um método de prova matemática usado para demonstrar a verdade de um número infinito de proposições.

A forma mais simples e mais comum de indução matemática prova que um enunciado vale para todos os números naturais n e consiste de dois passos:

- i) **A base:** Mostrar que o enunciado vale para $n = 0$, ou $n = 1$ (o menor valor pedido pelo enunciado), dependendo da definição utilizada de \mathbb{N} ;
- ii) **O passo indutivo:** Mostrar que, se o enunciado vale para $n = k$, então o mesmo enunciado vale para $n = k + 1$.

Como o enunciado é verificado verdadeiro para o menor caso possível de acordo com as condições do enunciado e pelo passo indutivo vale para o próximo número, segue que o enunciado é verdadeiro para todos os números naturais.

Ex 1: Mostre que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2 .

Ex 2: Prove que a soma dos n primeiros números naturais é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, i.e $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ex 3: Prove que a soma dos n primeiros quadrados perfeitos é igual a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, i.e $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ex 4: Prove que todo número natural maior ou igual a 2 pode ser decomposto num produto de números primos.