CONTAGEM

Gabriela Taniguchi

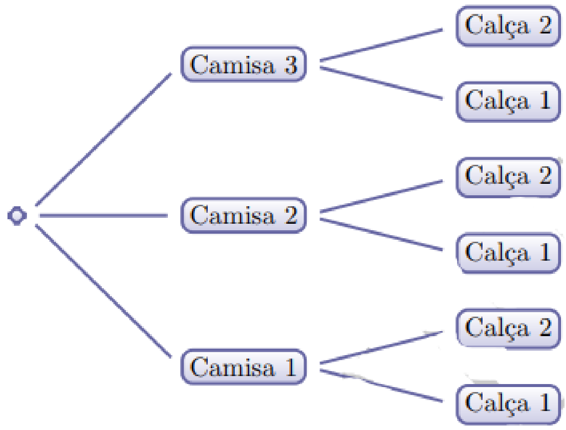
➝ É comum, tanto em problemas matemáticos, quanto no dia a dia, a necessidade de contar casos, maneiras e opções. E essa ocasião dá origem ao ramo da matemática que recebe o nome de **"Contagem"**, envolvendo métodos eficientes para encontrar tais tipos de possibilidades. Dessa forma, o presente material busca apresentar um compilado das técnicas existentes.
➝ A grande maioria desses métodos, baseia-se, direta ou indiretamente, no **"Princípio Fundamental da Contagem"**, também chamado de **"Princípio Multiplicativo".**

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

➝ Digamos que você possui **3 camisas e 2 calças**. De quantas maneiras diferentes você pode se vestir (escolhendo exatamente uma das camisas e uma das calças)? Veja que você vai executar duas ações:

(i) escolher a camisa
(ii) escolher a calça.

➝ A ação (i) pode ser executada de 3 maneiras diferentes e, para cada uma dessas maneiras, você poderá executar a ação (ii) de 2 maneiras diferentes. Dessa forma, o número total de maneiras de executar ambas as ações será:
3 x 2 = 6.
➝ Um método simples para visualizar todas as possíveis sequências de escolhas tomadas é construindo uma **árvore de decisão**, como exemplificado abaixo. O número total de elementos no último nível indica a resposta da pergunta inicial. Além disso, cada caminho, da raiz até um elemento do último nível, corresponde a uma sequência de ações que pode ser executada.



➝ Em suma, o Princípio Multiplicativo afirma que:

> Se desejamos executar uma sequência de n ações, onde a primeira ação pode ser executada de **m1 maneiras**, a segunda de **m2 maneiras** e assim sucessivamente, até que a n-ésima ação pode ser executada de **mn maneiras**, então o número total de maneiras de executar essa sequência de ações é igual ao **produto m1m2 . . . mn.**

SITUAÇÕES COMUNS

① NÚMERO COM ALGARISMOS DIFERENTES

EX: Quantos são os possíveis números de 4 algarismos distintos com dígitos de 1 a 9?

➝ Perceba que nesse caso, as opções para cada algarismo envolvem o conjunto {1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Contudo, a partir do momento em que algum algarismo é preenchido, o seguinte não pode ocupar a mesma opção escolhida.
➝ Desse modo, o número de possibilidades para a primeira casa é n, e a partir disso, n-1 para cada casa subsequente.

P = 9 x 8 x 7 x 6

② RESTRIÇÕES (NÚMEROS PARES, ÍMPARES...)

→ Em situações que restrinjam alguma característica, foque e pense nas limitações antes de generalizar, para evitar eliminar casos e cometer erros.
→ É extremamente comum situações como o exemplo anterior, contudo com a condição do número formado ser par. Desse modo, observemos o novo enunciado:

EX: Quantos são os possíveis números pares de 4 algarismos distintos com dígitos de 1 a 9?

→ O primeiro passo é interpretar que a restrição do número ser par significa que sua terminação deve ser par. Portanto seu último algarismo pode ser {2,4,6,8}.
→ A partir disso, basta iniciar na casa das unidades, com 4 possibilidades, e em seguida considerar as demais casas como o total de algarismos possíveis – casas já contadas.

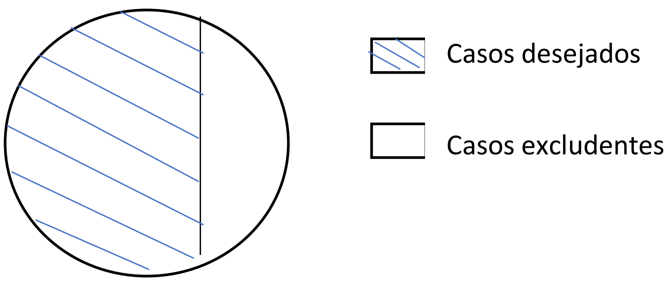
$P = \underline{6} \times \underline{7} \times \underline{8} \times \underline{4}$

③ DIVIDIR EM CASOS

→Ao realizar uma contagem, muitas vezes ocorre de não ser possível aplicar diretamente o Princípio Multiplicativo. Isso acontece quando a árvore de decisão é assimétrica, ou seja, quando a quantidade de escolhas para uma certa ação muda de acordo com as ações tomadas anteriormente. Em uma situação como essa, uma ótima ideia é tentar dividir o problema em vários casos.
→Ao dividir um problema de contagem em casos, onde dentro de cada caso contamos o número de soluções que nele se enquadram e todas as soluções se enquadram em exatamente um dos casos, o número total de soluções é igual à soma dos números de soluções de cada caso.

CONTAR PELO COMPLEMENTAR

→Muitas vezes, é mais fácil contar o número de maneiras que certa situação tem de não acontecer do que o número de maneiras que ela tem de acontecer. Ou seja, podemos contar primeiro o número de objetos que não são desse tipo e, em seguida, subtrair este valor do total de objetos.



EX: Calcule o número de palavras com cinco letras, que possuem (pelo menos) duas letras consecutivas iguais.

→É fácil perceber que contar as palavras desejadas envolve muitos casos e será trabalhoso. Enquanto calcular as palavras que fogem do padrão é simples, pois basta identificar quantas palavras não apresentam nenhuma letra consecutiva
→Nota-se que para a primeira letra há 26 possibilidades. Já para a segunda há 25, pois não pode corresponder à letra anterior. Para a terceira letra, há também 25 opções, pois elimina-se a letra ocupada anteriormente, mas a letra da primeira casa é uma possibilidade. Logo:

$\square = 26 \times 25^4$

→Resta calcular o número total de possibilidades, ou seja, 26^5.
→Assim, o total de palavras encontradas é:

$P = 26^5 - 26 \times 25^4 = 1.725.126.$

FATORIAL

→ Dado um número natural **n**, o produto de todos os naturais de 1 até n é chamado de fatorial de n e é representado, em símbolos, por **n!** (onde se lê n-fatorial). Assim, temos**:** **$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$**.
→ Além disso, por convenção, **$0! = 1$.**

EX: SIMPLIFIQUE AS EXPRESSÕES:

a) $\frac{20!}{18!}$

b) $\frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}$

c) $\frac{(n+1)! + (n+2)!}{n!}$

d) $\frac{(n+1)!(n+3)!}{(n+2)!n(n+1)!}$

PERMUTAÇÃO SIMPLES

→ A permutação está ligada ao ato de permutar, ou seja, reordenar um grupo de objetos. Dado um conjunto finito A, uma permutação dos elementos de A é uma lista ordenada, ou seja, uma sequência, na qual cada elemento de A aparece exatamente uma vez. Por exemplo, quando A = {v, w, x, y, z}, temos que a lista ordenada (x, v, w, z, y) é uma permutação dos elementos de A.
→ A quantidade de permutações dos elementos de um conjunto finito é frequentemente representada por **Pn** e equivale ao número de maneiras de dispor tais elementos em uma fila.
→ Assim, a partir do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), existindo n elementos; há n possibilidades para o primeiro elemento, n-1 para o segundo e assim sucessivamente, ou seja:

$P_n = n!$

→ É importante salientar que para essa representação, os n elementos permutados precisam ser distintos.

→ A permutação é frequentemente associada ao conceito de **ANAGRAMAS.**
→ Um anagrama corresponde a todas as disposições possíveis de um conjunto de letras, ou seja, todas as permutações possíveis, não sendo necessário formar uma palavra coerente.

EX: Quantos anagramas existem com a palavra MARTELO?

→ Basta permutar as 7 letras da palavra, de modo que o número de anagramas seja **7!**

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

→ Quando existem elementos repetidos, que representam o mesmo sentido, a contagem sofre um impacto, pois tais elementos geram contagens repetidas.
→ Assim, o anagrama da palavra ANA não seria 3! = 6, pois os possíveis anagramas seriam:

ANA
AAN
NAA

→ Isso acontece pois não há distinção entre A1 e A2, ambos são a letra A, de modo que há duas disposições iguais em que apenas é trocada essas suas letras, o que em termos práticos não ilustra outro caso a ser contado.
→ Para eliminar esse problema, basta dividir o resultado inicial pelo (número de um elemento repetido!). Isso ocorre porque a quantidade de contagens repetidas equivale ao número de permutações dos elementos iguais.

$$P = \frac{n!}{a!b!\ldots}$$ Sendo "a" e "b" o número de repetições de a e b

EX: Quantos anagramas existem com a palavra PAPAGAIO?

→ Há 8 letras, logo as permutações totais são 8!
→ Há 3 letras A, logo há 3! formas de permutar os A's

A1A2A3	A1A3A2
A2A3A2	A2A3A1
A3A1A2	A3A2A1

→ Há 2 letras P, logo há 2! formas de permutar os P's

P1P2
P2P1

→ Logo, a resposta é 8! / 2!3! = 3360 anagramas

EXERCÍCIOS:

1) Qual o número de anagramas da palavra MISSISSIPI?

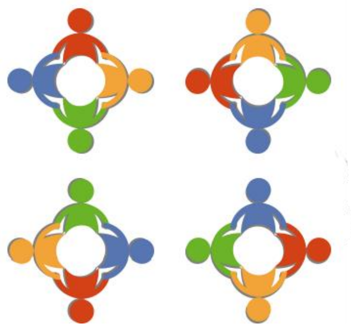
2) Quantos são os números formados por exatamente 8 algarismos, escolhidos do conjunto {1, 2, 3, 4}, onde o algarismo 1 aparece no máximo três vezes, o algarismo 2 aparece no máximo quatro vezes e os demais algarismos aparecem exatamente uma vez cada?

3) Um sapo está sobre uma reta. A cada pulo que ele dá, ele anda exatamente 15cm para a direita ou 15cm para a esquerda. Sabe-se que ele deu 10 pulos e retornou à sua posição original. Determine a quantidade de percursos distintos que ele pode ter percorrido.

4) De quantas formas podemos permutar as letras da palavra ELOGIAR de modo que as letras A e R fiquem juntas em qualquer ordem?

PERMUTAÇÃO CIRCULAR

→ Permutações circulares envolve as maneiras de colocar um grupo de n pessoas em um círculo.
→ Perceba que o grupo de pessoas pode girar ao redor do círculo livremente, desde que não seja alterada a ordem relativa entre as pessoas. Ou seja, a imagem abaixo ilustra uma mesma disposição circular:



→ Com isso, já sabemos que podemos permutar n pessoas em uma fila de n! formas. Assim consideraremos que existem n! maneiras de permutar o grupo em círculos.
→ Agora, resta eliminar as contagens em excesso. Observe que a imagem acima ilustra que uma disposição de n pessoas é contada n vezes, portanto, para cada posição no círculo as pessoas podem girar de modo que cada uma delas ocupe uma das n posições.
→ Com isso, dividimos n! por n, pois para cada permutação, há n contagens repetidas.
→ Portanto, a fórmula de permutações circulares é sintetizada por:

$$\boxed{P = (n-1)!}$$

EXERCÍCIOS:

1) De quantas maneiras podemos organizar uma roda com 4 crianças?

2) De quantos modos podemos posicionar 6 pessoas em uma roda, dentre elas João e Maria, de modo que João e Maria fiquem lado a lado?

3) De quantos modos podemos formar uma roda com 8 pessoas, contendo as pessoas A, B e C, de modo que:
   (a) As pessoas A, B e C fiquem juntas?
   (b) As pessoas A,B e C fiquem juntas e B fique entre A e C?

ARRANJOS

→ Arranjos são agrupamentos formados com p elementos de um conjunto de n elementos, em que a **ORDEM IMPORTA.**

→ Ou seja, são como permutações, trocas de posição entre os elementos. Mas no caso dos arranjos, são escolhidos p elementos para ocupar as posições ordenadas, sendo p<=n.

→ Geralmente envolve questões com pódio, senhas...

→ Sendo assim, utiliza-se o princípio multiplicativo e, em casos de repetições, a estratégia apresentada no tópico sobre permutações com repetição.

EX: Quais são os números de 3 algarismos formados pelos elementos {1,2,3,4,5,6}?

→ É suficiente selecionar 3 “casas” e aplicar o princípio multiplicativo da seguinte forma:

$\underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} = 120$ números

→ Ainda que não seja muito complicado, existe a fórmula geral do arranjo, na qual basicamente retira as “casas que não serão utilizadas do fatorial de n”.

$$\boxed{A = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

EXERCÍCIOS:

1) Em um concurso de talentos 9 candidatos foram selecionados, mas apenas 3 podem ocupar o pódio. Nessa condição, de quantas formas o pódio poderá ser composto

2) Uma empresa realizou entrevistas com 20 candidatos, porém, apenas 8 vão ser contratados. Considerando que 3 já tem a vaga garantida, quantas são as possibilidades restantes para ocupar as vagas que sobraram?

3) O Senado federal é composto por 81 senadores, com mandatos que possuem duração de 8 anos. Dentro do Congresso será montada uma comissão, com o presidente da comissão, o relator da comissão, o secretário e o suplente. Qual o número de comissões distintas que podem ser formadas, escolhendo 4 dentre os 81 senadores?

COMBINAÇÃO

→ Combinação é a quantidade de grupos que podemos fazer com p elementos retirados de um conjunto de n elementos. Com isso, calcula-se os **subconjuntos.**

→ Como trata-se de um agrupamento e não de uma ordenação, a **ORDEM NÃO IMPORTA**. O que significa que o grupo {a,b,c} é o mesmo que {b,c,a}, bem como em todas as permutações entre esses três elementos.

→ A lógica para calcular as combinações de n elementos em um grupo p é a seguinte:

i) Calcular os arranjos possíveis. Ou seja, utilizar o princípio multiplicativo para identificar as ordenações possíveis.

ii) As repetições consistem nas permutações de um grupo com p elementos, ou seja, nas maneiras em que um grupo pode se organizar de modo ordenado.

iii) Por fim, basta dividir i por ii.

→ Geralmente envolve questões com comissões.
→Quanto à representação formal, uma combinação de n elementos para um subgrupo com p elementos é:

$$\boxed{C=\frac{n!}{(n-p)!p!}}$$

EXERCÍCIOS:

1) Qual o número de conjuntos de 5 elementos com números distintos de 1 a 52?

2) Quantas comissões de 4 elementos podemos formar com 20 alunos de uma turma?

3) Um técnico de um time de voleibol possui a sua disposição 15 jogadores que podem jogar em qualquer posição. De quantas maneiras ele poderá escalar seu time de 6 jogadores?

4) Uma equipe de trabalho é formada por 6 mulheres e 5 homens. Eles pretendem se organizar em grupo de 6 pessoas, com 4 mulheres e 2 homens, para compor uma comissão. Quantas comissões podem ser formadas?

BARRAS E BOLAS

→Barras e bolas é um método e uma analogia visual que é muito útil para certos problemas de combinatória.
→É uma forma de contar as possibilidades de escolher p entre n elementos nas condições de que:

i) A ordem não importa
ii) Os objetos podem ser escolhidos mais de uma vez

→Observe um exemplo que ilustra essa situação:

EX: De quantos modos podemos escolher 4 sorvetes em loja que oferece 7 sabores?

→Nessa situação podemos escolher 4 sorvetes de 1 sabor, 3 de um e 1 de outro e assim sucessivamente.
→Com isso, imaginaremos que para cada sorvete a ser escolhido há uma “bola”.

→A partir disso, as maneiras de escolher os quatro sabores consiste em separar essas bolas com “barras”, de tal modo que o intervalo entre cada barra ilustre a quantidade daquele sabor.
→Por exemplo, a situação abaixo ilustra um caso em que são escolhidos três sorvetes do primeiro sabor e 1 do quinto:

→Perceba que as barras representam os intervalos, logo não são os sabores propriamente ditos, e por isso existem 6 barras na ilustração, e não 7. De forma que a última barra demonstre que não há sorvetes com o sabor 7.
→Portanto, trata-se de um anagrama com 4 bolas e 6 barras:

→E isso já sabemos resolver a partir da estratégia de anagramas. Ou seja, existem **10!/ 4!6! = 210 maneiras.**

$$B=\frac{(bolas+barras)!}{bolas!barras!}$$

→Lembre-se que a quantidade de barras é sempre a quantidade de elementos a serem separados – 1.

EXERCÍCIOS:

1) Quantas são as soluções para a equação $x + y + z + w + r = 15$?

2) Em um supermercado são vendidas 5 marcas diferentes de refrigerante. Uma pessoa que deseje comprar 3 latas de refrigerante, sem que haja preferência por uma determinada marca, pode escolhê-las de N formas. Qual o valor de N?

3) Se 7 kg de feijão forem distribuídos para até quatro famílias, de modo que cada uma delas receba um número inteiro de quilos, então, nesse caso, a quantidade de maneiras distintas de se distribuírem esses 7 kg de feijão para essas famílias será igual a

Para o que precisarem, só chamar 😉

(31) 98569-9827